

Ασκήσεις ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ

Ιωάννης Αβραμίδης
Κωνσταντίνος Μορφίδης



Θεσσαλονίκη 2015



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Ασκήσεις Μεθόδου Μετακινήσεων

Συγγραφή

Ιωάννης Αβραμίδης
Κωνσταντίνος Μορφίδης

Κριτικός αναγνώστης

Χρήστος Καρακώστας

Συντελεστές έκδοσης

ΓΛΩΣΣΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Δήμητρα Κατσαρού
ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΙΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ: Ελένη Αβραμίδου

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 3.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/gr/>

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

ISBN 978-960-603-020-8

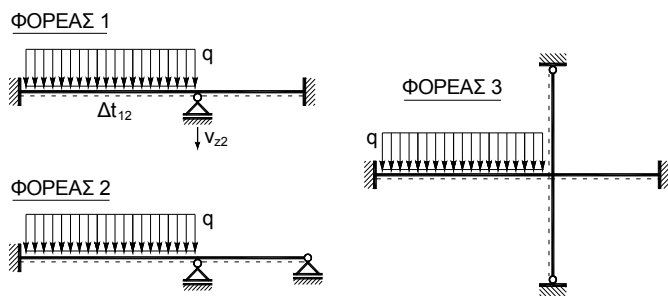
Πίνακας Περιεχομένων

Πίνακας συντομεύσεων - Ακρωνύμια	vii
Επεξηγηματικό Σημείωμα	viii
Κατάλογος συμβόλων	ix
Πρόλογος	xiii
Εισαγωγή	E-1
E1. Σύνοψη των βημάτων επίλυσης φορέων με τη ΜΜ	E-1
E2. Συμβάσεις προσήμων	E-4
E2.1 Τοπικό και καθολικό σύστημα αναφοράς	E-4
E2.2 Συμβατικά θετικές φορές εξωτερικών εντασιακών μεγεθών	E-4
E2.3 Συμβατικά θετικές φορές εξωτερικών παραμορφωσιακών μεγεθών	E-4
E2.4 Φορτία διατομής: Η σύμβαση προσήμων βάσει της ίνας αναφοράς	E-4
E2.5 Φορτία διατομής: Η σύμβαση προσήμων της ΜΜ	E-6
E2.6 Σύμβαση συμβολισμού και σχεδίασης φορτίων διατομής και μετακινήσεων	E-6
E3. Το διάγραμμα Williot για την εύρεση των μετατοπίσεων στο ΓΚΣ	E-7
E4. Η φυσική σημασία των συντελεστών K_{mn} και K_{m0}	E-9
E5. Η αρχή των δυνατών έργων για τον υπολογισμό των K_{mn} και K_{m0}	E-9
E6. Έλεγχοι αποτελεσμάτων	E-11
E7. Βιβλιογραφία	E-12

Κεφ. 1: Πάγιοι ατενείς φορείς υπό εξωτερικά φορτία και καταναγκασμούς 1-1

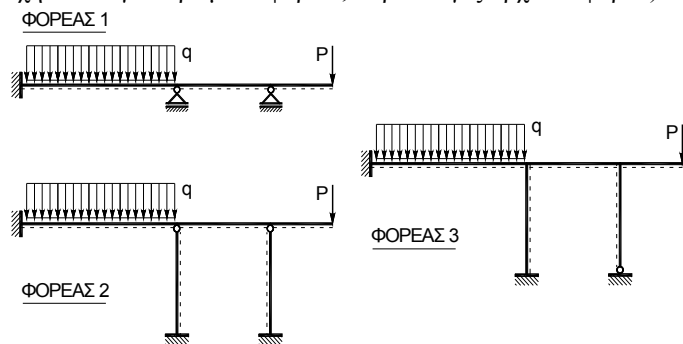
Άσκηση 1 1-2

(Επίλυση με χρήση αμφίπακτων στοιχείων, συνεχή φορτία, θερμοκρασιακή φόρτιση Δt , καταναγκασμένη βύθιση, παραλλαγές αρχικού φορέα)

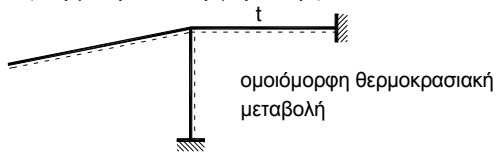


Άσκηση 2 1-10

(Επίλυση με χρήση αμφίπακτων και μονόπακτων στοιχείων, προκαταρκτική αποκοπή ισοστατικών τμημάτων, συνεχή και συγκεντρωμένα φορτία, παραλλαγές αρχικού φορέα)

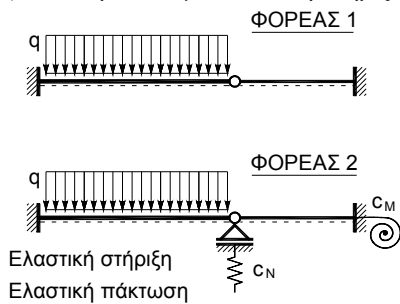


Άσκηση 3 1-16
 (Θερμοκρασιακή φόρτιση t)

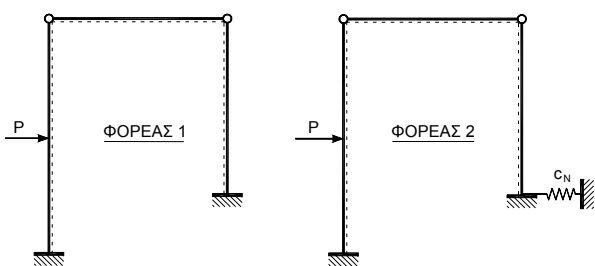


Κεφ. 2: Κινητοί ατενείς φορείς με ή χωρίς ελαστικές στηρίξεις/πακτώσεις 2-1

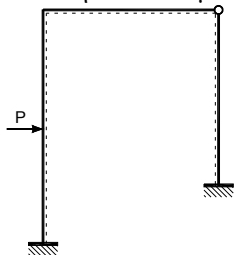
Άσκηση 4 2-2
 (Επίλυση δοκού με ελαστική στήριξη και ελαστική πάκτωση)



Άσκηση 5 2-9
 (Επίλυση πλαισίου με ένα άγνωστο μέγεθος, με και χωρίς ελαστική στήριξη)

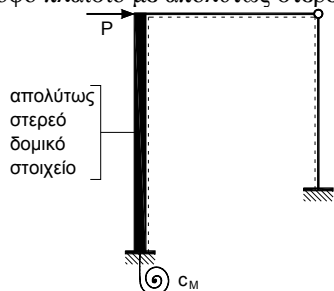


Άσκηση 6 2-17
 (Επίλυση πλαισίου με δύο άγνωστα μεγέθη)



Κεφ. 3: Κινητοί ατενείς φορείς με απολύτως στερεά τμήματα 3-1

Άσκηση 7 3-2
 (Μονώροφο πλαίσιο με απολύτως στερεό τμήμα)

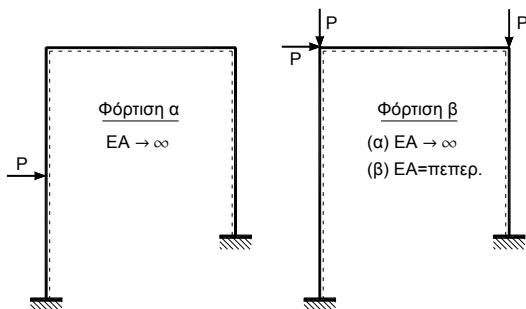


Άσκηση 8 3-8
 (Διώροφο πλαίσιο με απολύτως στερεό τμήμα)



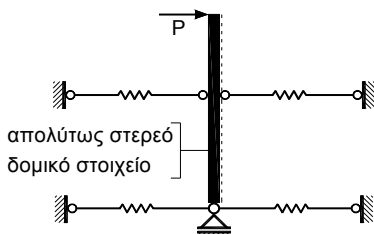
Κεφ. 4: Συγκριτική επίλυση φορέων με και χωρίς ατένεια 4-1

Άσκηση 9 4-2
 (Επίλυση πλαισίου με τρία άγνωστα μεγέθη, με και χωρίς την παραδοχή της ατένειας)

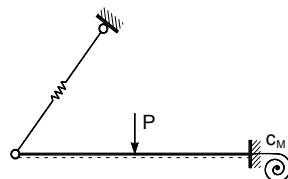


Κεφ.5: Φορείς με στοιχεία πεπερασμένης δυστένειας 5-1

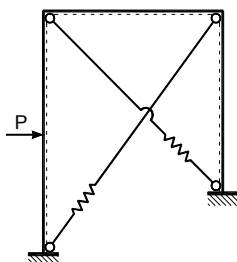
Άσκηση 10 5-2
 (Φορέας με ράβδους πεπερασμένης δυστένειας και ένα απολύτως στερεό τμήμα)



Άσκηση 11 5-8
 (Φορέας με λοξή ράβδο πεπερασμένης δυστένειας και ελαστική πάκτωση)

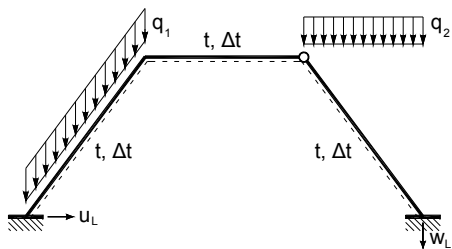


Άσκηση 12 5-13
 (Δίστυλο πλαίσιο με χιαστί ράβδους πεπερασμένης δυστένειας)



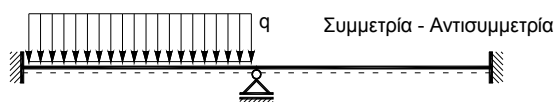
Κεφ. 6: Φορείς με λοξά στοιχεία 6-1

Άσκηση 13 6-2
 (Πλαίσιο με 2 άγνωστα μεγέθη)

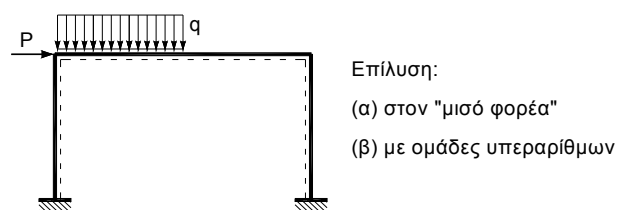


Κεφ. 7: Συμμετρικοί φορείς 7-1

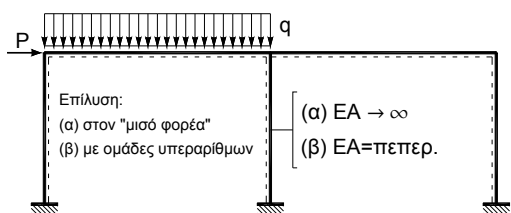
Άσκηση 14 7-2
 (Απλός φορέας με 1 άγνωστο μέγεθος)



Άσκηση 15 7-6
 (Δίστυλο πλαίσιο με 3 άγνωστα μεγέθη)

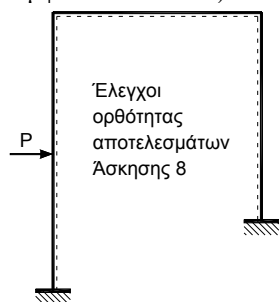


Άσκηση 16 7-23
 (Τρίστυλο πλαίσιο με 4 άγνωστα μεγέθη)

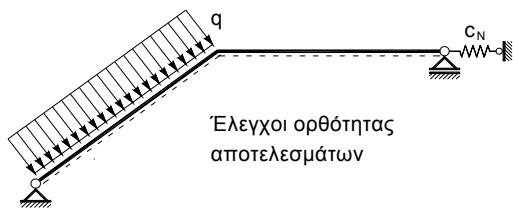


Κεφ. 8: Έλεγχοι ορθότητας της επίλυσης 8-1

Άσκηση 17 8-2
 (Δίστυλο αμφίπακτο πλαίσιο)

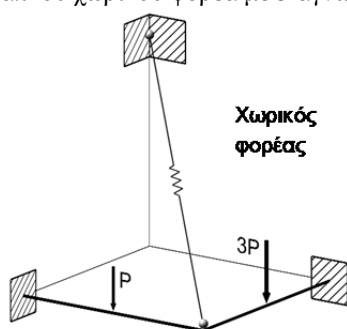


Άσκηση 18 8-6
 (Δοκός με λοξό τμήμα και ελαστική στήριξη)



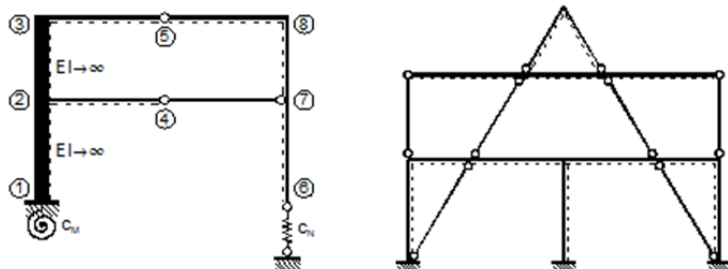
Κεφ. 9: Χωρικοί φορείς 9-1

Άσκηση 19 9-2
 (Επίλυση απλού χωρικού φορέα με 3 άγνωστα μεγέθη)



Κεφ. 10: Προσδιορισμός των βαθμών ελευθερίας 10-1

Άσκηση 20 10-2
 (Προσδιορισμός των βαθμών ελευθερίας και του γεωμετρικού κυρίου συστήματος για μία μεγάλη σειρά επίπεδων και χωρικών φορέων κάθε μορφής και τύπου)



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Βοηθητικοί πίνακες Π-1

Πίνακας 0. Ολοκληρώματα γινομένου δύο συναρτήσεων $\int f(x) \cdot g(x) dx$ Π-2
 Πίνακας 1α. Βασικό στοιχείο I (αμφίπακτο) - Φορτία & εσωτερικοί καταναγκασμοί Π-3
 Πίνακας 1β. Βασικό στοιχείο I (αμφίπακτο) - Καταναγκασμένες μετακινήσεις άκρων Π-4
 Πίνακας 2α. Βασικό στοιχείο IIα (μονόπακτο με άρθρωση δεξιά) Π-5
 Πίνακας 2β. Βασικό στοιχείο IIβ (μονόπακτο με άρθρωση αριστερά) Π-6
 Πίνακας 3. Τύποι για άμεση επίλυση γραμμικών εξισώσεων Π-7

Πίνακας συντομεύσεων - Ακρωνύμια

ΜΔ	Μέθοδος Δυνάμεων
ΜΜ	Μέθοδος Μετακινήσεων
ΣΚΣ	Στατικό Κύριο Σύστημα
ΓΚΣ	Γεωμετρικό Κύριο Σύστημα
ΑΔΕ	Αρχή των Δυνατών Έργων = Αρχή των δυνατών (νοητών) μετακινήσεων
ΑΣΔΕ	Αρχή των Συμπληρωματικών Δυνατών Έργων = Αρχή των νοητών (βοηθητικών) δυνάμεων
SI	Système International, Διεθνές Σύστημα (Μονάδων)

Επεξηγηματικό σημείωμα

Αρίθμηση σελίδων

Οι αρχικές σελίδες του βιβλίου αριθμούνται με λατινικούς αριθμούς i, ii, iii, iv, v,

Η αρίθμηση των σελίδων της Εισαγωγής και του Παραρτήματος αριθμούνται αυτοτελώς ως E-1, E-2, E-3, E-4, ... και Π-1, Π-2, Π-3, Π-4,..... αντιστοίχως.

Η αρίθμηση των σελίδων των κεφαλαίων 1 έως 10 του βιβλίου δεν είναι συνεχόμενη, αλλά γίνεται αυτοτελώς για κάθε άσκηση ξεχωριστά, όπου του αριθμού της σελίδας προηγείται ο αριθμός της εκάστοτε άσκησης. Έτσι, π.χ., οι σελίδες της Άσκησης 1 αριθμούνται ως εξής: 1-1, 1-2, 1-3, ..., οι σελίδες της Άσκησης 2 ως 2-1, 2-2, 2-3, κτλ.

Αρίθμηση σχημάτων

Η αρίθμηση των σχημάτων γίνεται αυτοτελώς για κάθε άσκηση ξεχωριστά, όπου του αριθμού του σχήματος προηγείται ο αριθμός της εκάστοτε άσκησης.

Χρωματισμός σχημάτων

Με **πράσινο χρώμα** συμβολίζονται, κατά κανόνα, τα βελάκια των φορτίων διατομής (εσωτερικά εντασιακά μεγέθη) στις διάφορες «πραγματικές» καταστάσεις, π.χ., $M_{23,0}$ ή $Q_{34,0}$ ή $M_{E,2}$.

Τα ίδια φορτία συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**, όταν δρουν στις καταστάσεις δυνατών μετακινήσεων, όπου προσάγονται ως εξωτερικά φορτία στις αντίστοιχες αρθρώσεις, π.χ., $M_{23,0}$ ή $Q_{34,0}$ ή $M_{E,2}$. Επίσης, με κόκκινο χρώμα συμβολίζονται οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι (δρομικές ή στροφικές) του ΓΚΣ και οι αντιδράσεις K_{mn} , K_{m0} που αναπτύσσονται σε αυτές στις διάφορες καταστάσεις, καθώς και γενικότερα οι τελικές αντιδράσεις στις στηρίξεις/πακτώσεις του δεδομένου φορέα.

Με **ανοικτό μπλε (γαλάζιο) χρώμα** σχεδιάζεται η («πραγματική») παραμόρφωση του ΓΚΣ στις διάφορες καταστάσεις "0" και " $\xi_n=1$ ", καθώς και η τελική ελαστική γραμμή του δεδομένου φορέα.

Τέλος, με **σκούρο μπλε χρώμα** σχεδιάζονται, γενικώς, τα διαγράμματα M, Q, N του εκάστοτε στατικού φορέα υπό τη δεδομένη φόρτιση, καθώς και η κατάσταση δυνατής μετακίνησης του ΓΚΣ στις διάφορες νοητές μοναδιαίες καταστάσεις " $\xi_n=1$ ".

Μονάδες μέτρησης

Οι μονάδες μέτρησης ακολουθούν το Διεθνές Σύστημα Μονάδων SI (Système International). Στο σύστημα αυτό, μονάδα μήκους είναι το μέτρο (m), μονάδα μάζας είναι το χιλιόγραμμα (kg), μονάδα χρόνου είναι το δευτερόλεπτο (sec) και μονάδα θερμοδυναμικής θερμοκρασίας είναι το Kelvin (K). Η μονάδα μέτρησης δυνάμεων, η οποία μας ενδιαφέρει κυρίως εδώ, είναι το N (Newton), που αποτελεί παράγωγη μονάδα και ορίζεται βάσει του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα ($F=m \cdot g$) ως ίση με τη δύναμη, η οποία ενεργώντας επί της μονάδας μάζας (1kg), της προσδίδει επιτάχυνση ίση προς τη μονάδα της επιτάχυνσης ($1m/sec^2$):

$$1N = 1kg \cdot 1m/sec^2$$

Συνήθως, χρησιμοποιούμε πολλαπλάσια της μονάδας αυτής, όπως το $kN=10^3N$ ή το $MN=10^6N$.

Η αντιστοιχία με το χιλιόγραμμα βάρους (kg^* ή kp, όπου $1kp = 1kg \cdot g = 1kg \cdot 9.81m/sec^2$) και τον τόνο βάρους ($t_{\text{βάρους}} = 10^3kp$) του παλιού μετρικού συστήματος MTS (με θεμελιώδεις μονάδες το μέτρο m, τον τόνο βάρους $t_{\text{βάρους}}$ και το δευτερόλεπτο s), προκύπτει με την επιτάχυνση βαρύτητας $g \approx 10m/sec^2$ αντί του $9.81m/sec^2$ (Σημ.: Η προσέγγιση αυτή αρκεί, συνήθως, για τεχνικές εφαρμογές) ως εξής:

$$1t_{\text{βάρους}} = 1t_{\text{μάζας}} \cdot g = 10^3kg \cdot 10m/sec^2 = 10^4 kg \cdot m/sec^2 = 10^4 N = 10kN$$

$$\rightarrow 1kN = 10^{-1} t_{\text{βάρους}} = 10^{-1} \cdot 10^3 kp = 100 kp.$$

Για τη θερμοκρασία ισχύει: $t [^{\circ}C] = T [K] - 273.15 [K]$, όπου $t [^{\circ}C]$ η θερμοκρασία σε μονάδες (βαθμούς) Κελσίου (Celsius) και $T [K]$ η θερμοκρασία σε μονάδες Kelvin.

Κατάλογος συμβόλων

Συστήματα αναφοράς (καρτεσιανά, τρισσορθογώνια, δεξιόστροφα)

{x, y, z} τοπικό σύστημα αναφοράς (για κάθε δομικό στοιχείο) {X, Y, Z} καθολικό σύστημα αναφοράς (για όλον τον φορέα)

Γεωμετρικά δεδομένα διατομής

L μήκος δομικού στοιχείου [m]
 I_x, I_T, J ροπή αδράνειας σε στρέψη (στρεπτική σταθερά) [m⁴]
 I_y, I ροπή αδράνειας σε κάμψη ως προς τον άξονα y [m⁴]
 I_z ροπή αδράνειας σε κάμψη ως προς τον άξονα z [m⁴]
 A επιφάνεια διατομής [m²]
 A_{S_y} τεκμαρτή (ενεργός) επιφάνεια ολίσθησης λόγω Q_y [m²], $A_{S_y} = \alpha_{S_y} A$
 A_{S_z} τεκμαρτή (ενεργός) επιφάνεια ολίσθησης λόγω Q_z [m²], $A_{S_z} = \alpha_{S_z} A$
 h, d ύψος διατομής [m]
 b πλάτος διατομής [m]

Ιδιότητες υλικού

E μέτρο ελαστικότητας [kN/m²]
 G μέτρο ολίσθησης [kN/m²]
 ν λόγος του Poisson [-], $E = G / \{2(\nu + 1)\}$
 α_t συντελεστής θερμικής διαστολής [1/°C]
 $\Phi_{ερπ}$ συντελεστής ερπυσμού [-]
 $\epsilon_{ξηρ}$ μέτρο συστολής/διαστολής ξήρανσης [-]

Ιδιότητες διατομών και δομικών στοιχείων

EI δυσκαμψία [kNm²], όπου $I = I_y$ ή I_z
 GA_S δυσστημσία [kN], όπου $A_S = A_{S_y}$ ή A_{S_z}
 EA δυστένεια [kN]
 GI_T, GJ δυστρεψία [kNm²]
 c_N ελαστική σταθερά δρομικού ελατηρίου [kN/m]
 c_M ελαστική σταθερά στροφικού ελατηρίου [kNm/rad]

Εξωτερικά μεγέθη έντασης (φορτία και αντιδράσεις στήριξης)

P_x, H, P, F μοναχική δύναμη κατά x [kN]
 P_y μοναχική δύναμη κατά y [kN]
 P_z, V, P, F μοναχική δύναμη κατά z [kN]
 M_{L_x}, M_{L_T} μοναχική στρεπτική ροπή [kNm]
 M_{L_y}, M_L μοναχική ροπή ως προς τον άξονα y [kNm]
 M_{L_z} μοναχική ροπή ως προς τον άξονα z [kNm]
P διάνυσμα μοναχικών (συγκεντρωμένων) φορτίων (δυνάμεων και ροπών)
 $q_x(x), n(x)$ κατανεμημένο φορτίο κατά την έννοια του άξονα x [kN/m]
 $q_y(x)$ κατανεμημένο φορτίο κατά την έννοια του άξονα y [kN/m]
 $q_z(x), q(x), p(x)$ κατανεμημένο φορτίο κατά την έννοια του άξονα z [kN/m]
 $m_{L_x}(x), m_T(x)$ κατανεμημένη στρεπτική ροπή [kNm/m]
 $m_{L_y}(x), m_L(x)$ κατανεμημένη ροπή ως προς τον άξονα y [kNm/m]
 $m_{L_z}(x)$ κατανεμημένη ροπή ως προς τον άξονα z [kNm/m]
p διάνυσμα κατανεμημένων φορτίων (δυνάμεων και ροπών)
 A αντίδραση (δύναμη) στήριξης
 M_{Π} ροπή πάκτωσης

Καταναγκασμοί

- $t(x)$ ομοιόμορφη (= σταθερή σε όλη τη διατομή x) θερμοκρασιακή φόρτιση [$^{\circ}\text{C}$]
 $\Delta t(x)$ ανομοιόμορφη (= γραμμικά μεταβαλλόμενη κατά το ύψος της διατομής x) θερμοκρασιακή φόρτιση [$^{\circ}\text{C}$]
 $u_{L,m}$ επιβεβλημένη (καταναγκασμένη) μετατόπιση της στήριξης m κατά x [m]
 $v_{L,m}$ επιβεβλημένη (καταναγκασμένη) μετατόπιση της στήριξης m κατά y [m]
 $w_{L,m}$ επιβεβλημένη (καταναγκασμένη) μετατόπιση της στήριξης m κατά z [m]
 $\varphi_{L,i,m}$ επιβεβλημένη (καταναγκασμένη) στροφή ως προς τον άξονα i ($i=x,y,z$) της πάκτωσης m [rad]
 ρ_u αξονικός ρήκτης $=-\Delta u_L$ [m]
 ρ_w εγκάρσιος ρήκτης $=-\Delta w_L$ [m]
 ρ_φ στροφικός ρήκτης $=-\Delta \varphi_L$ [m]
 ρ_θ στρεπτικός ρήκτης $=-\Delta \theta_L$ [m]

Εσωτερικά εντασιακά μεγέθη (φορτία διατομής)

- M_x, M_T ροπή στρέψης [kNm]
 M_y, M ροπή κάμψης ως προς τον άξονα y [kNm]
 M_z ροπή κάμψης ως προς τον άξονα z [kNm]
 Q_y τέμνουσα δύναμη κατά y [kN]
 Q_z, Q τέμνουσα δύναμη κατά z [kN]
 N αξονική δύναμη [kN]
 $M_{i,k,r}$ ροπή στο σημείο ή στον κόμβο i προς τη διεύθυνση του σημείου ή κόμβου k { i,k : δείκτες θέσης, r : δείκτης αιτίου}
 $M(x),_r$ διάγραμμα ροπών κάμψης λόγω του αιτίου r
 Αντίστοιχοι συμβολισμοί προς τους δύο προηγούμενους ισχύουν και για τα υπόλοιπα φορτία διατομής.
 σ διάνυσμα φορτίων διατομής

Μετακινήσεις

- u_x, u μετατόπιση κατά x [m]
 u_y, v μετατόπιση κατά y [m]
 u_z, w μετατόπιση κατά z [m]
 u_α, u_δ μετατόπιση αριστερής και δεξιάς όχθης μιας αξονικής άρθρωσης ($N=0$)
 $\Delta u=u_\alpha-u_\delta$ χάσμα (της ελαστικής γραμμής) = διαφορά αξονικών μετατοπίσεων
 v_α, v_δ μετατόπιση αριστερής και δεξιάς όχθης μιας διατμητικής άρθρωσης: $Q_y=0$
 w_α, w_δ μετατόπιση αριστερής και δεξιάς όχθης μιας διατμητικής άρθρωσης: $Q_z=0$
 $\Delta v=v_\alpha-v_\delta$ άλμα (της ελαστικής γραμμής) = διαφορά βυθίσεων κατά y
 $\Delta w=w_\alpha-w_\delta$ άλμα (της ελαστικής γραμμής) = διαφορά βυθίσεων κατά z
 φ_x, θ στροφή ως προς τον άξονα x [rad]
 φ_y, φ στροφή ως προς τον άξονα y [rad]
 φ_z στροφή ως προς τον άξονα z [rad]
 $\varphi_\alpha, \varphi_\delta$ στροφή αριστερής και δεξιάς όχθης μιας καμπτικής άρθρωσης: $M_y=0$
 $\Delta \varphi=\varphi_\alpha-\varphi_\delta$ γόνατο (στην ελαστική γραμμή) = διαφορά στροφών
 Αντίστοιχοι συμβολισμοί προς τους δύο προηγούμενους ισχύουν και στις περιπτώσεις στρεπτικής ($M_T=0$) και καμπτικής άρθρωσης ($M_z=0$).
 φ_i, φ_k στροφές των κόμβων i και k ενός δομικού στοιχείου $i-k$
 τ_i, τ_k στροφές άκρων δοκού $i-k$ (ως προς τον άξονα y)
 Ψ_{ik} στροφή της χορδής της δοκού $i-k$ (ως προς τον άξονα y)
 $w(x),_r$ ελαστική γραμμή (βύθιση κάθετα στον τοπικό άξονα x) λόγω του αιτίου r
 u διάνυσμα μετακινήσεων

Παραμορφώσεις διατομών

ϵ	αξονική παραμόρφωση (μήκυνση, βράχυνση) [-]
$\epsilon_{ελ}, \epsilon_{el}$	ελαστική αξονική παραμόρφωση $\{=N/(EA)\}$
ϵ_t	θερμοκρασιακή αξονική παραμόρφωση $\{=\alpha_t t\}$
γ_z, γ	διατμητική παραμόρφωση (ολίσθηση) κατά z [-]
γ_y	διατμητική παραμόρφωση (ολίσθηση) κατά y [-]
ζ	στρεπτική παραμόρφωση (συστροφή) [1/m]
κ_y, κ	καμπτική παραμόρφωση (καμπύλωση) ως προς τον άξονα y [1/m]
κ_z	καμπτική παραμόρφωση (καμπύλωση) ως προς τον άξονα z [1/m]
$\kappa_{ελ}, \kappa_{el}$	ελαστική καμπύλωση $\{=M/(EI)\}$
κ_t	θερμοκρασιακή καμπύλωση $\{=\alpha_t \Delta t/h\}$
ϵ	διάνυσμα παραμορφώσεων

Ενεργειακές και εργικές προτάσεις

E	γενικό σύμβολο για ένα μέγεθος έντασης ή παραμόρφωσης
K	γενικό σύμβολο για ένα μέγεθος έντασης (αντίδραση στήριξης, φορτίο διατομής)
δ	γενικό σύμβολο για ένα μέγεθος παραμόρφωσης (μετακίνηση, παραμόρφωση)
d	σύμβολο (τελεστής) διαφόρισης (παραγώγισης)
δ	σύμβολο (τελεστής) μεταβολής (Δεν πρέπει να συγχέεται με το σύμβολο δ που συμβολίζει γενικώς μεγέθη παραμόρφωσης)
E^V	ο άνω δείκτης V συμβολίζει ότι το πρόκειται για δυνατό μέγεθος: $E^V = \delta E$ π.χ. F^V νοητή (δυνατή) μοναχική δύναμη, δυνατό φορτίο $M^V(x)$ νοητό (δυνατό, βοηθητικό) διάγραμμα ροπών w^V δυνατή (νοητή) μετατόπιση φ^V δυνατή (νοητή) στροφή
W	ίδιο έργο (εσωτερικό W_i , εξωτερικό W_e)
W^*	ίδιο συμπληρωματικό έργο (εσωτερικό W_i^* , εξωτερικό W_e^*)
W_p	παθητικό έργο (εσωτερικό W_{pi} , εξωτερικό W_{pe})
W_p^*	παθητικό συμπληρωματικό έργο (εσωτερικό W_{pi}^* , εξωτερικό W_{pe}^*)
W^V ή δW	δυνατό έργο (εσωτερικό W_i^V ή δW_i , εξωτερικό W_e^V ή δW_e)
W^{*V} ή δW^*	συμπληρωματικό δυνατό έργο (εσωτ. W_i^{*V} ή δW_i^* , εξωτ. W_e^{*V} ή δW_e^*)
U	ενέργεια παραμόρφωσης
Π (Π_i, Π_e)	δυναμικό (εσωτερικό, εξωτερικό)
Π^* (Π_i^*, Π_e^*)	συμπληρωματικό δυναμικό (εσωτερικό, εξωτερικό)
$\delta\Pi, \delta^2\Pi$	1 ^η , 2 ^η μεταβολή του δυναμικού
$d\Pi, d^2\Pi$	1 ^ο , 2 ^ο διαφορικό του δυναμικού

Γραμμές επιρροής

ξ	τετμημένη φορτιζόμενου πέλματος
$P_Z(\xi)$	κινητή κατακόρυφη δύναμη επί του φορτιζόμενου πέλματος
$K_{a,PZ(\xi)=1}$	γραμμή επιρροής του εντασιακού μεγέθους K_a λόγω $P_Z(\xi)=1$
$\delta_{a,PZ(\xi)=1}$	γραμμή επιρροής του παραμορφωσιακού μεγέθους δ_a λόγω $P_Z(\xi)=1$ [απλούστερα: $K_{a,\xi}$ και $\delta_{a,\xi}$]
$\eta(\xi), \eta_\xi$	το γράμμα η συμβολίζει γενικά τις τεταγμένες γραμμών επιρροής

Σύμβολα Μεθόδου Δυνάμεων

N	πλήθος υπεραρίθμων εντασιακών μεγεθών
n, m	δείκτης (1, 2, ... , N)
X_n	υπεράριθμο εντασιακό μέγεθος
δ_n	παραμόρφωση στη θέση του καταλυθέντος συνδέσμου n

ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

δ_{m0}	συντελεστής φόρτισης
δ_{mn}	συντελεστής ενδοσιμότητας
$\mathbf{X} = [X_n]$	διάνυσμα υπεραρίθμων εντασιακών μεγεθών
$\delta_0 = [\delta_{m0}]$	διάνυσμα φόρτισης
$\delta = [\delta_{mn}]$	μητρώο ενδοσιμότητας
$\beta = -[\delta_{mn}]^{-1}$	αρνητικό αντίστροφο μητρώο ενδοσιμότητας ($=[\beta_{nm}]$)

Σύμβολα Μεθόδου Μετακινήσεων

N	πλήθος υπεραρίθμων παραμορφωσιακών μεγεθών
n, m	δείκτης (1, 2, ..., N)
ξ_n	υπεράριθμο παραμορφωσιακό μέγεθος
K_n	αντίδραση στη θέση του προστεθέντος συνδέσμου n
K_{m0}	συντελεστής φόρτισης
K_{mn}	συντελεστής στιβαρότητας
$\xi = [\xi_n]$	διάνυσμα υπεραρίθμων παραμορφωσιακών μεγεθών
$\mathbf{K}_0 = [K_{m0}]$	διάνυσμα φόρτισης
$\mathbf{K} = [K_{mn}]$	μητρώο στιβαρότητας
$\mathbf{B} = -[\mathbf{K}_{mn}]^{-1}$	αρνητικό αντίστροφο μητρώο στιβαρότητας ($=[\mathbf{B}_{nm}]$)

Πρόλογος

Το ηλεκτρονικό αυτό βιβλίο περιέχει:

- (α) μία σύντομη εισαγωγή, όπου παρουσιάζεται συνοπτικά η διαδικασία επίλυσης φορέων με την κλασική, «χειρωνακτική» Μέθοδο Μετακινήσεων (MM), και
- (β) μία σειρά ασκήσεων, που στοχεύουν στην εμπέδωση της κατανόησης του βασικού σκεπτικού της MM και των διαφόρων παραδοχών της.

Η συνοπτική παρουσίαση της MM συνοδεύεται από την υπενθύμιση ορισμένων στοιχείων χρήσιμων για την επεξεργασία των ασκήσεων, όπως π.χ. της σύμβασης θετικών προσήμων, του διαγράμματος Williot, της αρχής των δυνατών έργων και των τρόπων ελέγχου των αποτελεσμάτων. Δίνονται, επίσης, οι βοηθητικοί πίνακες που απαιτούνται για τις αριθμητικές επιλύσεις. Το παρουσιαζόμενο υλικό αντλήθηκε, κυρίως, από τα έντυπα συγγράμματα: Αβραμίδη, Ι. (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος II: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση, και Αβραμίδη, Ι. & Μορφίδη, Κ. (2007). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος IIβ: Η κλασική μέθοδος των μετακινήσεων - Σύνοψη θεωρίας και ασκήσεις*. Θεσσαλονίκη: Σοφία.

• Σε τι μας χρειάζεται η Μέθοδος Μετακινήσεων;

Στη σημερινή πράξη του δομοστατικού μελετητή εφαρμόζεται για την ανάλυση των κατασκευών, σχεδόν αποκλειστικά, η λεγόμενη Μέθοδος Στιβαρότητας. Η Μέθοδος Στιβαρότητας ακολουθεί την τυπική διαδικασία επίλυσης της, πολύ γενικότερης, Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, η οποία επιτρέπει την εύκολη κωδικοποίηση όλων των αναγκαίων αλγορίθμων και τη λογισμική τους διατύπωση σε σύγχρονες γλώσσες προγραμματισμού, προκειμένου όλοι οι υπολογισμοί να γίνονται αυτόματα με ηλεκτρονικό υπολογιστή. Γιατί, λοιπόν, ασχολούμαστε με την κλασική MM, η οποία είναι κατάλληλη μόνον για «χειρωνακτικές» επιλύσεις μικρών σχετικά φορέων;

Ένας βασικός λόγος προκύπτει από το γεγονός, ότι η τυποποιημένη και για αυτό σχετικά «αφηρημένη» Μέθοδος Στιβαρότητας έχει κοινό θεωρητικό υπόβαθρο με την κλασική MM. Έτσι, μία από τις προϋποθέσεις για την κατανόηση και ευχερέστερη εκμάθηση της σύγχρονης αυτής μεθόδου ανάλυσης, αποτελεί η βαθύτερη κατανόηση της κλασικής MM.

Ακόμη σημαντικότερο, όμως, κίνητρο είναι η εμπειρία και η πεποίθηση, ότι η ενασχόληση με την κλασική MM, όπως άλλωστε και με τη δυαδικώς αντίστοιχη της κλασική Μέθοδο Δυνάμεων (ΜΔ), βοηθάει τον σπουδαστή να αναπτύξει μία καλύτερη αντίληψη για τη μηχανική (στατική) συμπεριφορά ενός δομικού φορέα. Ειδικότερα, η έμφαση, που δίνει η κλασική MM στη θεώρηση των παραμορφωσιακών καταστάσεων κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός φορέα, οδηγεί τον σπουδαστή σε μία ευχερέστερη και ταχύτερη αντίληψη των παραμορφώσεων που υφίσταται ο φορέας υπό την επιρροή διαφόρων αιτίων, επιταχύνοντας έτσι την ανάπτυξη του στατικού του αισθητηρίου.

• Οι ασκήσεις του παρόντος ηλεκτρονικού βιβλίου

Για λόγους απλούστευσης των υπολογισμών και προβολής των ουσιαστών χαρακτηριστικών της MM, όλες σχεδόν οι ασκήσεις του παρόντος βιβλίου (πλην μίας) αφορούν επίπεδους φορείς, χωρίς όμως αυτό να περιορίζει τη γενικότητα της διαδικασίας επίλυσης.

Επίσης, οι εξεταζόμενοι φορείς θεωρούνται, κατά κανόνα, ατενείς ($EA \rightarrow \infty$). Η σκοπιμότητα της θεώρησης ατενών φορέων συνίσταται στη σημαντική μείωση του πλήθους των υπεραριθμών γεωμετρικών μεγεθών, που συνεπάγεται η αγνόηση των αξονικών παραμορφώσεων, η οποία στις περισσότερες περιπτώσεις της πράξης αποτελεί μία ρεαλιστική παραδοχή. Η επιτυγχανόμενη, έτσι, μείωση του όγκου των υπολογισμών επιτρέπει την ανετότερη κατανόηση της διαδικασίας επίλυσης. Πάντως, σε αρκετούς από τους επιλυόμενους φορείς συμπεριλαμβάνονται και δομικά στοιχεία πεπερασμένης δυστένειας, και παρουσιάζεται ο τρόπος χειρισμού τους με την MM.

Παράλληλα με την παραδοχή της ατένειας, γίνεται, γενικώς, και η παραδοχή της ατμησίας ($GA_S \rightarrow \infty$), που και αυτή αποτελεί πολύ συχνά μία ρεαλιστική απλοποιητική παραδοχή. Η αγνόηση των διατμητικών παραμορφώσεων δεν συνεπάγεται περαιτέρω μείωση του πλήθους των υπεραριθμών γεωμετρικών μεγεθών, απλώς, απλοποιεί λίγο τις αριθμητικές πράξεις. Η θεώρηση φορέων με πεπερασμένη δυστμησία δεν

παρουσιάζει καμία πρόσθετη δυσκολία, αφού το μόνο που απαιτεί είναι η χρήση διαφορετικών (πινακοποιημένων) τιμών για τις ροπές της αμφίπακτης ή μονόπακτης δοκού.

Οι πρώτες, εισαγωγικές, ασκήσεις αφορούν πολύ απλούς φορείς, στη συνέχεια όμως επιλύονται και συνθετότερα συστήματα, που περιλαμβάνουν κινητά, πάγια και υπερπάγια πλαίσια. Γενικώς πάντως, η γεωμετρική αοριστία των επιλύομενων φορέων είναι μικρή, έτσι ώστε το πλήθος των αριθμητικών πράξεων να διατηρείται σε ανεκτά όρια. Εκτός από ακλόνητα εδραζόμενους φορείς, επιλύονται και φορείς με ελαστικές στηρίξεις/πακτώσεις, οι οποίοι συχνά απαντώνται στην δομική πράξη όταν το έδαφος θεμελίωσης είναι ενδόσιμο. Τέλος, κυρίως για διδακτικούς λόγους, επιλύονται και φορείς με απολύτως στερεά ($EI \rightarrow GA_s \rightarrow EA \rightarrow \infty$) δομικά στοιχεία, κάτι που συμβάλλει στην όξυνση της κατανόησης της στατικής συμπεριφοράς πολλών πραγματικών φορέων.

Οι φορτίσεις περιλαμβάνουν εξωτερικά φορτία, θερμοκρασιακές μεταβολές και καταναγκασμένες μετακινήσεις στηρίξεων.

Ιδιαίτερο βάρος δόθηκε στους τρόπους υπολογιστικής αξιοποίησης της συμμετρίας συμμετρικών φορέων υπό συμμετρική ή αντισυμμετρική φόρτιση.

Η ακολουθία των ασκήσεων κλείνει με την επίλυση ενός σχετικά απλού χωρικού φορέα και με μία σειρά φορέων, για τους οποίους ζητείται ο προσδιορισμός του γεωμετρικού κυρίου συστήματος, δηλαδή ο προσδιορισμός των βαθμών ελευθερίας τους.

• **Επισημάνση προς τους σπουδαστές**

Απευθυνόμενοι προς τους νέους σπουδαστές θα θέλαμε να επισημάνουμε, ότι η Στατική δεν μαθαίνεται με απλή ανάγνωση των έτοιμων λυμένων ασκήσεων.

Αντίθετα, ο αναγνώστης που θέλει να την κάνει κτήμα του, θα πρέπει να υποβληθεί στον κόπο, αφού προηγουμένως έχει κατανοήσει τη σχετική θεωρία, να επιλύσει αυτοδύναμα με χαρτί και μολύβι μία αρκετά μεγάλη σειρά ασκήσεων, προκειμένου να συνειδητοποιήσει επαρκώς τις απαιτούμενες διαδικασίες επίλυσης, τις υποκείμενες παραδοχές και τις διάφορες δυνατότητες ελέγχου των αποτελεσμάτων.

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 2015

Ιωάννης Ε. Αβραμίδης Κώστας Ε. Μορφίδης

Εισαγωγή

Βιντεοπαρουσίαση: <https://www.youtube.com/watch?v=nerKeF27LgM&feature=youtu.be>

Ε1. Σύνοψη των βημάτων επίλυσης φορέων με τη MM

<p>Δεδομένος φορέας και φόρτιση</p>	
<p>Βήμα 1: Καθορισμός του ΓΚΣ – Προσθήκη συνδέσμων</p> <p>(i) Καθορισμός (και αρίθμηση) των κόμβων του φορέα, έτσι ώστε τα μεγέθη έντασης κάθε δομικού στοιχείου να μπορούν να υπολογιστούν από έτοιμους πίνακες.</p> <p>(ii) Καθορισμός των N1 ανεξάρτητων άγνωστων στροφών κόμβων και δέσμευση των στροφών αυτών με δικινητές πακτώσεις.</p> <p>(iii) Καθορισμός (ενδεχομένως με τη βοήθεια του σχηματισμού ράβδων) του ελάχιστου απαιτούμενου πλήθους N2 των ανεξάρτητων άγνωστων μετατοπίσεων κόμβων ή άγνωστων στροφών χορδών των δοκών και δέσμευση των μετατοπίσεων των κόμβων με δρομικές δεσμικές ράβδους ή των στροφών χορδών με δικινητές πακτώσεις αντίστοιχα.</p> <p>(iv) Αρίθμηση όλων των $N=N1+N2$ πρόσθετων συνδέσμων του ΓΚΣ και καθορισμός της συμβατικά θετικής φοράς (γενικώς: κατά την έννοια των αξόνων του καθολικού συστήματος αναφοράς) των αντίστοιχων υπεραριθμών μεγεθών. Κατά προτίμηση, η αρίθμηση θα πρέπει να γίνεται με τρόπο που να ελαχιστοποιεί το εύρος του μητρώου στιβαρότητας.</p>	
<p>Βήμα 2: Υπολογισμός της εντασιακής κατάστασης του ΓΚΣ λόγω εξωτερ. φόρτισης "0"</p> <p>Υπολογίζονται οι ροπές $M_{ik,0}$ (ενδεχομένως και οι τέμνουσες $Q_{ik,0}$ και οι αξονικές δυνάμεις $N_{ik,0}$) στα άκρα των δομικών στοιχείων i-k του ΓΚΣ λόγω εξωτερικής φόρτισης (φορτία και καταναγκασμοί) με τη βοήθεια πινάκων (βλ. Πίνακες 1, 2α, 2β).</p>	
<p>Βήμα 3: Υπολογισμός των εντασιακών καταστάσεων του ΓΚΣ λόγω μοναδιαίων παραμορφωσιακών μεγεθών "ξ_n=1" (n = 1, 2, ..., N).</p> <p>Επιβάλλονται διαδοχικά στο ΓΚΣ οι N μοναδιαίοι καταναγκασμοί "ξ_n=1" (n = 1, ..., N). Όταν επιβάλλεται ο καταναγκασμός "ξ_n=1", όλες οι άλλες μετακινήσεις ξ_m με m ≠ n θεωρούνται μηδενικές. Σε κάθε μία κατάσταση "ξ_n=1" υπολογίζονται οι ροπές $M_{ik,n}$ (ενδεχομένως και οι τέμνουσες $Q_{ik,n}$ και οι αξονικές δυνάμεις $N_{ik,n}$) στα άκρα των δομικών στοιχείων με τη βοήθεια πινάκων (βλ. Πίνακες 1, 2α, 2β).</p>	

<p>Βήμα 4: Υπολογισμός των αντιδράσεων K_{m0} και K_{mn} στους προστεθέντες συνδέσμους</p> <p>4α. Από τα εντασιακά μεγέθη του βήματος 2 ($M_{ik,0}$, $Q_{ik,0}$, $N_{ik,0}$), υπολογίζονται οι αντιδράσεις K_{m0} (δυνάμεις, ροπές) στις N προστεθείσες (δρομικές, στροφικές) δεσμικές ράβδους με τις συνθήκες ισορροπίας $\Sigma M=0$ κόμβων ή με την ΑΔΕ (Αρχή Δυνατών Έργων ή Δυνατών Μετακινήσεων). Για την εφαρμογή της ΑΔΕ, το ΓΚΣ μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα με τέτοιο τρόπο, ώστε το μόνο άγνωστο μέγεθος, που κατά τη θεωρούμενη δυνατή μετακίνηση εκτελεί έργο, να είναι η εκάστοτε ζητούμενη αντίδραση. Προκύπτουν, έτσι, οι <i>συντελεστές φόρτισης</i> K_{m0} ($m=1, \dots, N$).</p> <p>4β. Από τα εντασιακά μεγέθη του βήματος 3 ($M_{ik,n}$, $Q_{ik,n}$, $N_{ik,n}$), υπολογίζονται οι αντιδράσεις K_{mn} (δυνάμεις, ροπές) στις N προστεθείσες (δρομικές, στροφικές) δεσμικές ράβδους με τις συνθήκες ισορροπίας $\Sigma M=0$ κόμβων ή με την ΑΔΕ. Για την εφαρμογή της ΑΔΕ, το ΓΚΣ μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα με τέτοιο τρόπο, ώστε το μόνο άγνωστο μέγεθος, που κατά τη θεωρούμενη δυνατή μετακίνηση εκτελεί έργο, να είναι η εκάστοτε ζητούμενη αντίδραση. Προκύπτουν, έτσι, οι <i>συντελεστές στιβαρότητας</i> K_{mn} ($m, n=1, \dots, N$).</p>	$K_{10} = M_{23,0}$ $K_{20} = 0$ $K_{11} = M_{21,1} + M_{23,1}$ $K_{21} = \frac{(M_{12,1} + M_{21,1})}{H}$ $K_{12} = M_{21,2}$ $K_{22} = \frac{(M_{12,2} + M_{21,2})}{H} + \frac{M_{43,2}}{H}$
<p>Βήμα 5: Κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας</p> <p>(i) Καταστρώνεται το γραμμικό σύστημα των επιλυουσών εξισώσεων ισορροπίας: $[K_{mn}] [\xi_m] + [K_{m0}] = [0] \quad (m, n = 1, 2, \dots, N)$ <i>Έλεγχος:</i> Εφόσον οι αντιδράσεις K_{mn} και K_{m0} εισήχθησαν κατά την έννοια των ξ_m, θα πρέπει:</p> <p>(α) το μητρώο στιβαρότητας $[K_{mn}]$ να είναι συμμετρικό, δηλαδή $K_{mn} = K_{nm}$, και</p> <p>(β) οι διαγώνιοι συντελεστές K_{mm} να είναι θετικοί, δηλαδή $K_{mm} > 0$, και μάλιστα όλες οι συνεισφορές, από τις οποίες αυτοί συντίθενται, να είναι θετικές.</p> <p>(ii) Το σύστημα εξισώσεων επιλύεται (π.χ. με την μέθοδο Gauss) λαμβάνοντας υπόψη τη συμμετρία, οπότε προκύπτουν οι άγνωστες μετακινήσεις:</p> $[\xi_m] = - [K_{mn}]^{-1} [K_{m0}].$ <p>(Για $N=2$ και $N=3$ δίνονται στον ακόλουθο Πίνακα 3 έτοιμοι τύποι για τον άμεσο υπολογισμό των αγνώστων.)</p>	$\left. \begin{aligned} K_{11} \cdot \xi_1 + K_{12} \cdot \xi_2 + K_{10} &= 0 \\ K_{21} \cdot \xi_1 + K_{22} \cdot \xi_2 + K_{20} &= 0 \end{aligned} \right\}$ $\Rightarrow \xi_1, \xi_2$

Βήμα 6: Υπολογισμός των τελικών εντασιακών μεγεθών

(i) Ροπές κάμψης

Πρώτα υπολογίζονται οι τελικές ροπές M_{ik} στα άκρα των στοιχείων i-k με την αρχή της επαλληλίας:

$$M_{ik} = M_{ik,0} + \sum (M_{ik,n} \cdot \xi_n) \quad \text{για } n = 1, 2, \dots, N$$

(ii) Τα πρόσημα των κομβικών ροπών M_{ik}

τροποποιούνται, έτσι ώστε να αντιστοιχούν στη σύμβαση προσήμων βάσει ίνας αναφοράς \rightarrow τελ. M_{ik} .

(iii) Σχεδιάζονται τα διαγράμματα των ροπών.

(iv) Τέμνουσες δυνάμεις

Από τις τελικές ροπές τελ. M_{ik} υπολογίζονται οι τέμνουσες δυνάμεις Q_{ik} στα άκρα των στοιχείων i-k με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας και σχεδιάζονται τα διαγράμματά τους.

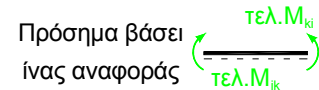
(v) Αξονικές δυνάμεις

– *Κινητοί και πάγιοι φορείς:* Με γνωστές τις τελικές τέμνουσες, υπολογίζονται από τις συνθήκες ισορροπίας στους κόμβους οι αξονικές δυνάμεις N_{ik} στα άκρα των στοιχείων i-k και σχεδιάζονται τα διαγράμματά τους. Εναλλακτικά, οι αξονικές δυνάμεις μπορούν να υπολογιστούν με θεώρηση του σχηματισμού ράβδων, που προκύπτει από τον δεδομένο φορέα με εισαγωγή πλήρων αρθρώσεων σε όλους τους κόμβους του. Ο (χαλαρός ή ισοστατικός) σχηματισμός ράβδων φορτίζεται κατάλληλα με τις κομβικές δυνάμεις A_{ik} (βλ. [2], παράγρ. 3.3.6-B) και επιλύεται ως δικτύωμα κατά τα γνωστά.

– *Υπερπάγιοι φορείς:* Ο σχηματισμός ράβδων υπερπάγιων φορέων είναι ένα υπερστατικό δίκτυωμα, οπότε ο (προσεγγιστικός) υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων απαιτεί άρση της παραδοχής της ατένειας και εφαρμογή της ΜΔ (βλ. [2], παράγρ. 3.3.6-Γ).

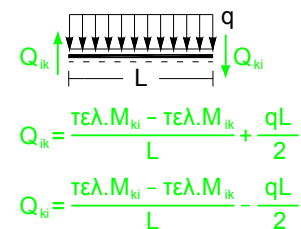
π.χ.

$$M_{23} = M_{23,0} + M_{23,1} \cdot \xi_1 + M_{23,2} \cdot \xi_2$$

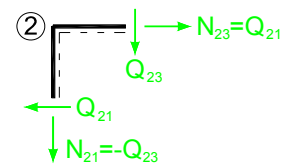


$$\text{TEΛ.}M_{ik} = -M_{ik} \quad \text{TEΛ.}M_{ki} = M_{ki}$$

Τέμνουσες:

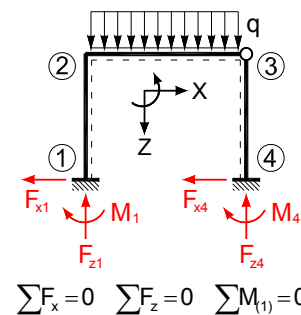


π.χ.



Βήμα 7: Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Η διαδικασία επίλυσης ενός φορέα ολοκληρώνεται με την διενέργεια ενός επαρκούς πλήθους ελέγχων (ισορροπίας και συμβιβαστού) των αποτελεσμάτων (βλ. [2], παράγρ. 3.2.6).



Σημείωση:

Συχνά είναι βολικό, το Βήμα 4α ("Υπολογισμός των K_{m0} ") να εκτελείται αμέσως μετά το Βήμα 2, και το Βήμα 4β ("Υπολογισμός των K_{mn} ") αμέσως μετά το Βήμα 3.

E2. Συμβάσεις προσήμων

E2.1 Τοπικό και καθολικό σύστημα αναφοράς

Για τη γεωμετρική απεικόνιση του φορέα και τον χαρακτηρισμό των εξωτερικών του φορτίων, χρησιμοποιείται ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, αποτελούμενο από τους τρεις κάθετους μεταξύ τους άξονες X, Y, Z, οι οποίοι σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων. Το σύστημα αυτό, το οποίο ορίζεται στην αρχή κάθε υπολογισμού, ισχύει για όλον τον φορέα και ονομάζεται καθολικό σύστημα αναφοράς.

Ο χαρακτηρισμός «καθολικό» χρησιμοποιείται σε αντιδιαστολή προς το τοπικό σύστημα αναφοράς, το οποίο εισάγεται για κάθε δομικό στοιχείο ξεχωριστά, και ισχύει μόνο για το στοιχείο αυτό. Τα τοπικά συστήματα αναφοράς συμβολίζονται με τα πεζά γράμματα x, y, z.

E2.2 Συμβατικά θετικές φορές εξωτερικών εντασιακών μεγεθών

Η διεύθυνση δράσης των εξωτερικών φορτίων (δυνάμεων, ροπών) μπορεί να χαρακτηριστεί με τη βοήθεια των δεικτών X, Y, Z ως παράλληλη με τον αντίστοιχο άξονα του καθολικού συστήματος αναφοράς. Συχνά, ιδιαίτερα για τα κατανεμημένα φορτία που ασκούνται σε συγκεκριμένα δομικά στοιχεία, χρησιμοποιείται το τοπικό σύστημα αναφοράς x-y-z των στοιχείων αυτών για τους δείκτες των φορτίων. Τα εξωτερικά φορτία ορίζονται, γενικώς, ως θετικά, όταν η φορά τους συμπίπτει με τη φορά των καθολικών αξόνων X, Y, Z ή και των τοπικών αξόνων x, y, z του στοιχείου επάνω στο οποίο δρουν. Οι δείκτες X, Y, Z ή x, y, z χρησιμοποιούνται για εξωτερικά φορτία μόνον εφ' όσον υφίσταται λόγος (προς αποφυγή σύγχυσης), διαφορετικά μπορούν να παραλειφθούν.

Αντίστοιχη ρύθμιση ισχύει και για τις αντιδράσεις των στηρίξεων. Οι αντιδράσεις ορίζονται, γενικώς, ως θετικές, όταν η φορά τους συμπίπτει με τη φορά των καθολικών αξόνων X, Y, Z. Αυτό συμβαίνει, κατά κανόνα, σε προγράμματα ανάλυσης κατασκευών λόγω της υποχρεωτικής σε αυτά τυποποίησης. Αντίθετα, σε επιλύσεις που κάνουμε με το χέρι, οι αντιδράσεις ορίζονται όπως μας είναι βολικότερο κάθε φορά. Π.χ., οι κατακόρυφες αντιδράσεις εισάγονται, συνήθως, ενάντια στη φορά του καθολικού άξονα Z. Επίσης, οι δείκτες X, Y, Z χρησιμοποιούνται μόνον όταν υφίσταται λόγος, διαφορετικά μπορούν να παραλειφθούν.

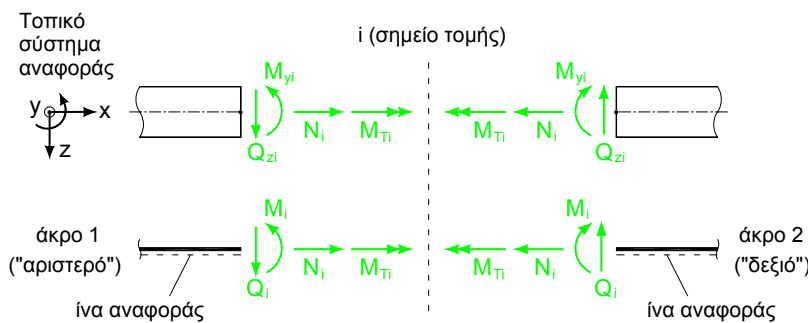
E2.3 Συμβατικά θετικές φορές εξωτερικών παραμορφωσιακών μεγεθών

Τα εξωτερικά παραμορφωσιακά μεγέθη, δηλαδή οι μετακινήσεις (μετατοπίσεις και στροφές), σε οποιοδήποτε σημείο ενός φορέα θεωρούνται θετικές, όταν αναπτύσσονται κατά την έννοια των καθολικών αξόνων αναφοράς.

E2.4 Φορτία διατομής: Η σύμβαση προσήμων βάσει της ίνας αναφοράς

Ενώ για τον χαρακτηρισμό (διεύθυνση και φορά) των εξωτερικών εντασιακών μεγεθών (φορτίων και αντιδράσεων στήριξης) αρκεί ένα μόνο σύστημα αναφοράς (το καθολικό καρτεσιανό τρισσορθόγωνιο σύστημα αναφοράς), ο ορισμός των εσωτερικών εντασιακών μεγεθών (δηλαδή των φορτίων διατομής) απαιτεί τη χρησιμοποίηση του τοπικού συστήματος αναφοράς του γραμμικού στοιχείου. Κατά κανόνα, όταν πρόκειται για ευθύγραμμα στοιχεία, θεωρούμε ότι ο τοπικός άξονας x συμπίπτει με τον κεντροβαρικό άξονα του στοιχείου και ότι οι τοπικοί άξονες y και z συμπίπτουν με τους κύριους άξονες της εκάστοτε διατομής.

Στην περίπτωση επίπεδων γραμμικών φορέων, των οποίων όλα τα δομικά στοιχεία βρίσκονται μέσα στο επίπεδο X-Z και οι οποίοι φορτίζονται εντός του επιπέδου τους, αναπτύσσονται μόνο τα φορτία διατομής M_y , Q_z και N (βλ. Σχ. E.1 άνω).



Σχήμα E.1 Σύμβαση προσήμων για επίπεδους φορείς στο επίπεδο X-Z : Ορισμός των θετικών εσωτερικών εντασιακών μεγεθών στην διατομή i ενός ευθύγραμμου στοιχείου και της ίνας αναφοράς.

Ροπές στρέψης $M_{Ti}=M_{xi}$ αναπτύσσονται σε επίπεδους φορείς μόνον όταν αυτοί φορτίζονται από μη συνεπίεδα με αυτούς φορτία. Οι δείκτες y, z αναφέρονται στο τοπικό σύστημα αναφοράς του στοιχείου, στο οποίο ανήκει η εκάστοτε θεωρούμενη διατομή και, συνήθως, παραλείπονται, δηλαδή γράφουμε M αντί M_y και Q αντί Q_z .

Για μια αναλυτικότερη παρουσίαση των συμβάσεων σχετικά με τα φορτία διατομής γραμμικών φορέων βλ. Αβραμίδης (2014), παράγρ. 3.2.6-B.

Η ίνα αναφοράς

Επίσης, συχνά παραλείπεται η σχεδίαση των αξόνων αναφοράς $x-y-z$. Ο τοπικός άξονας x με φορά από το («αριστερό») άκρο 1 προς το («δεξιό») άκρο 2 της δοκού παραλείπεται, διότι ταυτίζεται με τον κεντροβαρικό άξονα της δοκού. Ο άξονας y παραλείπεται, διότι θεωρούμε πάντα ότι είναι κάθετος στο επίπεδο σχεδίασης. Έτσι, για τον πλήρη καθορισμό του τοπικού συστήματος απομένει να σχεδιασθεί ο άξονας z , ο οποίος βέβαια είναι κάθετος στον άξονα της δοκού και έχει φορά προς τα «κάτω». Αντ' αυτού σχεδιάζεται μία διακεκομμένη γραμμή, η λεγόμενη *ίνα αναφοράς*, σε εκείνη την πλευρά του άξονα της δοκού από την οποία εξέρχεται, τρόπος του λέγειν, ο θετικός άξονας z (βλ. Σχ. E.1 κάτω). Η ίνα αναφοράς ταυτίζεται με την ακραία «κάτω» ίνα της δοκού και χρησιμοποιείται για λόγους ευκολότερης κατανόησης της επιπόνησης της δοκού. Έτσι, σε περίπτωση θετικών αξονικών δυνάμεων η ίνα αναφοράς εφελκύεται, ενώ σε περίπτωση αρνητικών θλίβεται. Αντιστοίχως στην καμπτική επιπόνηση (Σχ. E.2): Όταν οι καμπτικές ροπές είναι θετικές, η ίνα αναφοράς που βρίσκεται στην «κάτω πλευρά» της δοκού εφελκύεται, ενώ όταν οι ροπές είναι αρνητικές θλίβεται. Και αντιστρόφως: Αν, π.χ., γνωρίζουμε την καμπτική παραμόρφωση μιάς δοκού, τότε μπορούμε εύκολα να διακρίνουμε αν εφελκύεται ή θλίβεται η ίνα αναφοράς της σε οποιοδήποτε σημείο της δοκού και, επομένως, να συμπεράνουμε αν η καμπτική ροπή σε αυτό το σημείο είναι θετική ή αρνητική. Τα εισαγωγικά στις παραπάνω λέξεις «αριστερό», «δεξιό» και «κάτω» θέλουν να επισημάνουν τη σχετικότητα του χαρακτηρισμού, ο οποίος προϋποθέτει, εν προκειμένω, ότι ο τοπικός άξονας x του γραμμικού στοιχείου έχει οριζόντια θέση στο επίπεδο σχεδίασης. Ένα γραμμικό στοιχείο μπορεί, όμως, να είναι και λοξά διατεταγμένο μέσα στον δομικό φορέα. Επομένως, οι χαρακτηρισμοί «αριστερό» άκρο, «δεξιό» άκρο, «κάτω» και «πάνω» νοούνται πάντα στο τοπικό σύστημα αναφοράς του στοιχείου αυτού.



Σχήμα E.2 Ίνα αναφοράς και πρόσημο καμπτικών ροπών.

Τα διαγράμματα των φορτίων διατομής

Η συνάρτηση $S(x)$, που για συγκεκριμένη εξωτερική φόρτιση δίνει το μέγεθος ενός φορτίου διατομής S κατά μήκος των τοπικών αξόνων x των δομικών στοιχείων του φορέα, ονομάζεται *διάγραμμα του φορτίου διατομής S* για τη συγκεκριμένη εξωτερική φόρτιση.

Οι χωρικοί φορείς απαιτούν, για τον πλήρη καθορισμό της εντασιακής τους κατάστασης, έξι διαγράμματα, ένα για κάθε φορτίο διατομής $N(x), Q_y(x), Q_z(x), M_x(x), M_y(x)$ και $M_z(x)$.

Σε επίπεδους φορείς μέσα στο επίπεδο $X-Z$, οι οποίοι φορτίζονται με συνεπίεδα φορτία, αρκούν τρία μόνον διαγράμματα: το διάγραμμα της αξονικής δύναμης $N(x)$, το διάγραμμα της τέμνουσας δύναμης $Q(x)=Q_z(x)$ και το διάγραμμα των ροπών κάμψης $M(x)=M_y(x)$.

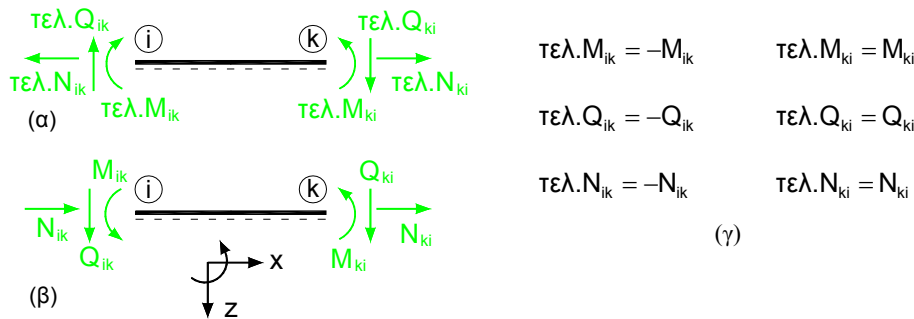
Κάθε διάγραμμα καθορίζεται από το μέγεθος και το πρόσημο των τεταγμένων του. Για μία ενιαία σχεδίαση των διαγραμμάτων, τηρούμε την ακόλουθη σύμβαση:

Σύμβαση σχεδίασης διαγραμμάτων

Θετικές τιμές των ροπών κάμψης σχεδιάζονται υπό κλίμακα προς την πλευρά της ίνας αναφοράς, δηλαδή προς την πλευρά που δείχνει ο τοπικός άξονας z σε κάθε δομικό στοιχείο. Αρνητικές τιμές σχεδιάζονται προς την αντίθετη πλευρά. Για τις τέμνουσες και τις αξονικές ισχύει το ακριβώς αντίστροφο.

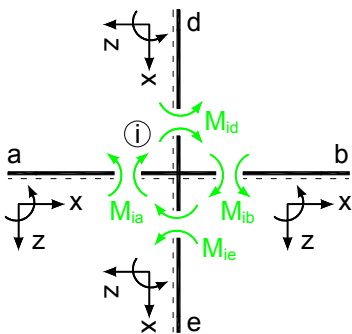
E2.5 Φορτία διατομής: Η σύμβαση προσήμων της MM

Για συγκεκριμένους λόγους σκοπιμότητας (βλ. Αβραμίδης (2013), παρ. 3.1.3), στη MM χρησιμοποιούμε για τα εσωτερικά εντασιακά μεγέθη (δηλαδή για τα φορτία διατομής) μια σύμβαση θετικών προσήμων διαφορετική από την σύμβαση βάσει της ίνας αναφοράς (βλ. Αβραμίδης (2014), παρ. 3.2.6-B). Η νέα αυτή σύμβαση φαίνεται στο σχήμα E.3(β) σε αντιπαράθεση με τα πρόσημα βάσει ίνας αναφοράς (Σχ. E.3(α)). Αν χαρακτηρίσουμε με το πρόθεμα «τελ.» τα εντασιακά μεγέθη βάσει ίνας αναφοράς, για τα οποία σχεδιάζονται τα τελικώς ζητούμενα διαγράμματα φορτίων διατομής, τότε μεταξύ αυτών και των φορτίων διατομής με πρόσημα της MM υφίστανται οι σχέσεις που δίνονται στο σχήμα E.3(γ):



Σχήμα E.3 Πρόσημα βάσει ίνας αναφοράς (α), πρόσημα της MM (β) και σχέσεις μεταξύ κομβικών φορτίων διατομής ενός στοιχείου i-k (γ).

Μία ευπρόσδεκτη πρακτική συνέπεια της σύμβασης προσήμων της MM είναι η εξής: Όταν καταστράνεται η συνθήκη ισορροπίας των ροπών που δρουν σε έναν κόμβο i, όλα τα βελάκια των επικόμβιων ροπών των συντρεχουσών δομικών στοιχείων έχουν την ίδια φορά (την φορά των δεικτών του ρολογιού, βλ. Σχ. E.4), γεγονός που μειώνει την πιθανότητα λάθους στην άθροιση. Γενικότερα, η νέα αυτή σύμβαση προσήμων βοηθάει στην αποφυγή λαθών κατά την χρήση της αρχής των δυνατών έργων για τον υπολογισμό των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης.



Σχήμα E.4 Επικόμβιες ροπές με σύμβαση προσήμων MM.

E2.6 Σύμβαση συμβολισμού και σχεδίασης φορτίων διατομής και μεγεθών μετακίνησης

Τα εντασιακά μεγέθη που αναπτύσσονται στα άκρα ενός δομικού στοιχείου i-k χαρακτηρίζονται για μεν το «αριστερό» άκρο i με τους κάτω δείκτες ik, για δε το «δεξιό» άκρο με τους κάτω δείκτες ki. Από τους δύο αυτούς δείκτες, ο πρώτος αναφέρεται στο άκρο του στοιχείου όπου αναπτύσσεται το εντασιακό μέγεθος και ο

δεύτερος αναφέρεται στο απέναντι άκρο του στοιχείου αυτού. Έτσι, π.χ., η ροπή στο άκρο i ενός στοιχείου $i-k$ συμβολίζεται ως M_{ik} και η ροπή του στο άκρο k ως M_{ki} .

Αν στον κόμβο α ενός φορέα συντρέχουν περισσότερα από δύο στοιχεία, π.χ. το στοιχείο $\alpha-\beta$, το στοιχείο $\alpha-\gamma$ και το στοιχείο $\alpha-\delta$, τότε οι ροπές γύρω από τον κόμβο α χαρακτηρίζονται ως $M_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\gamma}$ και $M_{\alpha\delta}$.

Αντίστοιχη ρύθμιση εφαρμόζεται και για τα μεγέθη παραμόρφωσης. Έτσι, οι στροφές των άκρων των τριών στοιχείων $\alpha-\beta$, $\alpha-\gamma$ και $\alpha-\delta$ που συντρέχουν στον κόμβο α χαρακτηρίζονται, γενικώς, ως $\varphi_{\alpha\beta}$, $\varphi_{\alpha\gamma}$ και $\varphi_{\alpha\delta}$. Εάν βέβαια ο κόμβος είναι συμπαγής (τα τρία στοιχεία συνδέονται μονολιθικά στον κόμβο α), τότε $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\delta}$. Αν, όμως, τα τρία στοιχεία συνδέονται αρθρωτά στον κόμβο α , τότε οι τρεις αυτές γωνίες στροφής έχουν για τυχούσα φόρτιση διαφορετική τιμή.

Όσον αφορά στη *σχεδίαση* των βελών που συμβολίζουν φορτία διατομής και μετακινήσεις, ακολουθούνται οι ακόλουθες συμβάσεις, που είναι κοινές τόσο στην ΜΜ όσο και στην ΜΔ:

*Σύμβαση για την σχεδίαση των βελών
που συμβολίζουν φορτία διατομής*

Τα βελάκια που συμβολίζουν εσωτερικά εντασιακά μεγέθη (δυνάμεις ή ροπές) σχεδιάζονται **πάντοτε** έτσι ώστε να δείχνουν τη **συμβατικά θετική φορά** του αντίστοιχου μεγέθους. Η **πραγματική φορά** ενός εντασιακού μεγέθους προκύπτει από τη φορά που έχει το βελάκι το οποίο το συμβολίζει σε συνδυασμό με το πρόσημο που έχει η αριθμητική τιμή του μεγέθους αυτού. Αν η τιμή είναι θετική, τότε η πραγματική φορά του μεγέθους συμπίπτει με τη συμβατική του φορά. Αν η τιμή είναι αρνητική, τότε η πραγματική φορά είναι ακριβώς αντίθετη της συμβατικής. Είναι, βεβαίως, δυνατόν να σχεδιάσει κανείς το βελάκι που συμβολίζει ένα εντασιακό μέγεθος, π.χ. την ροπή στο άκρο i ενός στοιχείου $i-k$, με φορά αντίθετη της συμβατικά θετικής. Τότε, όμως, το βελάκι συμβολίζει όχι την M_{ik} , αλλά την $-M_{ik}$, και, επομένως, δίπλα στο βελάκι πρέπει να γράφεται $-M_{ik}$ (και όχι M_{ik}).

Συνιστάται ενθέρμως στον αναγνώστη, τουλάχιστον κατά τη φάση εκμάθησης και εξοικείωσής του με τη ΜΜ, να ακολουθεί **απαρεγκλίτως** τη σύμβαση αυτή, δηλαδή να σχεδιάζει **πάντοτε** τα εσωτερικά εντασιακά μεγέθη με βελάκια που δείχνουν τη συμβατικά θετική φορά τους.

*Σύμβαση για τη σχεδίαση των βελών
που συμβολίζουν μεγέθη μετακίνησης
(μετατοπίσεις και στροφές κόμβων, στροφές χορδής δοκών)*

Τα βελάκια που συμβολίζουν μεγέθη μετακίνησης (μετατοπίσεις και στροφές κόμβων, στροφές χορδής δοκών) σχεδιάζονται, **συνήθως**, έτσι ώστε να δείχνουν την **πραγματική φορά** του αντίστοιχου μεγέθους. Αυτό γίνεται διότι, σε αντίθεση με τα φορτία διατομής, οι μετακινήσεις είναι «μεγέθη που τα βλέπουμε με το μάτι» και, συνεπώς, βλέπουμε πάντα την πραγματική τους φορά. Εάν η πραγματική αυτή φορά ενός μεγέθους μετακίνησης, π.χ. της στροφής ψ_{ik} της χορδής της δοκού $i-k$, συμπίπτει με τη συμβατικά θετική του φορά, τότε δίπλα στο βελάκι γράφεται ψ_{ik} . Εάν, όμως, η πραγματική αυτή φορά της στροφής ψ_{ik} είναι αντίθετη προς τη συμβατικά θετική φορά, τότε δίπλα στο βελάκι γράφεται $-\psi_{ik}$.

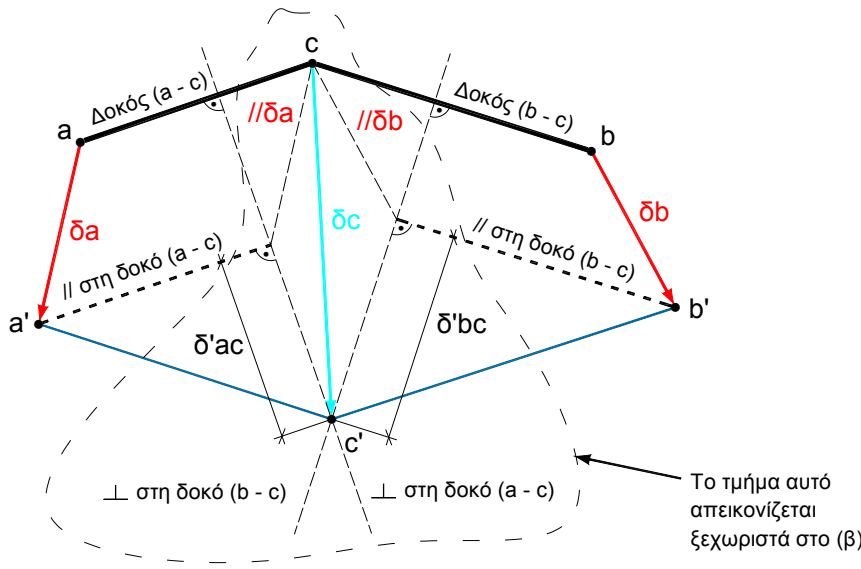
E3. Το διάγραμμα Williot για την εύρεση των μετατοπίσεων στο ΓΚΣ

Το διάγραμμα Williot (βλ. [2], παράγρ. 3.3.1-H) αποτελεί ένα πάρα πολύ απλό εργαλείο για την εποπτική και γρήγορη εύρεση των μετατοπίσεων των κόμβων του ΓΚΣ, τόσο στην κατάσταση "0" όσο και στις καταστάσεις μοναδιαίων μετατοπίσεων " $\xi_n=1$ ". Υπενθυμίζεται ότι οι μετατοπίσεις των κόμβων μάς χρειάζονται για τον υπολογισμό των στροφών των χορδών των δομικών στοιχείων, από τις οποίες υπολογίζονται βάσει πινάκων οι ροπές κάμψης στα άκρα τους.

Στο ακόλουθο σχήμα E.5 παρουσιάζεται με γενικευμένο τρόπο η επίλυση του προβλήματος του προσδιορισμού της μετατοπισμένης θέσης ενός κόμβου με τη βοήθεια του διαγράμματος Williot. Για τις δύο δοκούς (a-c) και (b-c), που συνδέονται στον κόμβο c τυχόντος δεδομένου φορέα, έστω ότι είναι γνωστές οι μετατοπίσεις δ_a και δ_b των άκρων τους a και b. Ζητείται η μετατόπιση δ_c του κόμβου c. Η μετατόπιση δ_c προκύπτει από συνδυασμό παράλληλων μεταθέσεων και στροφών των δύο δοκών. Με παράλληλη προβολή των διανυσμάτων δ_a και δ_b , έτσι ώστε να διέρχονται από τον κοινό κόμβο c, καλύπτεται κατ' αρχάς η

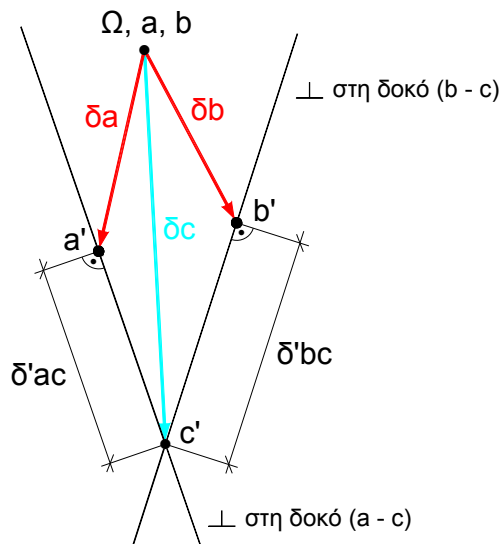
παράλληλη μετάθεση. Στη συνέχεια, πάντα μέσα στο πλαίσιο της γεωμετρίας των απειροστών μετακινήσεων, φέρουμε δύο κάθετες ευθείες επί των αξόνων των δοκών (μετατοπίσεις δ'ac και δ'bc), καλύπτοντας, έτσι, τις στροφικές συνιστώσες. Οι κάθετες αυτές αποτελούν γεωμετρικούς τόπους για τη ζητούμενη τελική θέση του κόμβου c, ο οποίος, κατά συνέπεια, βρίσκεται στην τομή των δύο καθέτων. Η συνολική μετατόπιση δc του κόμβου c δίνεται από την ευθεία c-c'.

Η σχεδίαση του διαγράμματος Williot για έναν ολόκληρο φορέα απαιτεί μία συστηματική ακολουθία ενεργειών, όπου κάθε φορά επαναλαμβάνεται η προηγουμένως περιγραφείσα διαδικασία: Η εύρεση της θέσης ενός κόμβου, (π.χ. του c), προϋποθέτει ότι ο κόμβος αυτός συνδέεται μέσω δύο δοκών με δύο άλλους κόμβους, (π.χ. τον a και τον b), των οποίων οι μετατοπίσεις (δα και δb) είναι ήδη γνωστές (είτε μηδενικές είτε δεδομένου/γνωστού μεγέθους).



- δc = συνολική μετακίνηση του κόμβου c
- $\delta'ac$ = τοπική μετατόπιση κάθετα στον άξονα της δοκού a - c
- $\delta'bc$ = τοπική μετατόπιση κάθετα στον άξονα της δοκού b - c

(α) Διάγραμμα διανυσμάτων μετατόπισης συμπεριλαμβανομένων και των δοκών

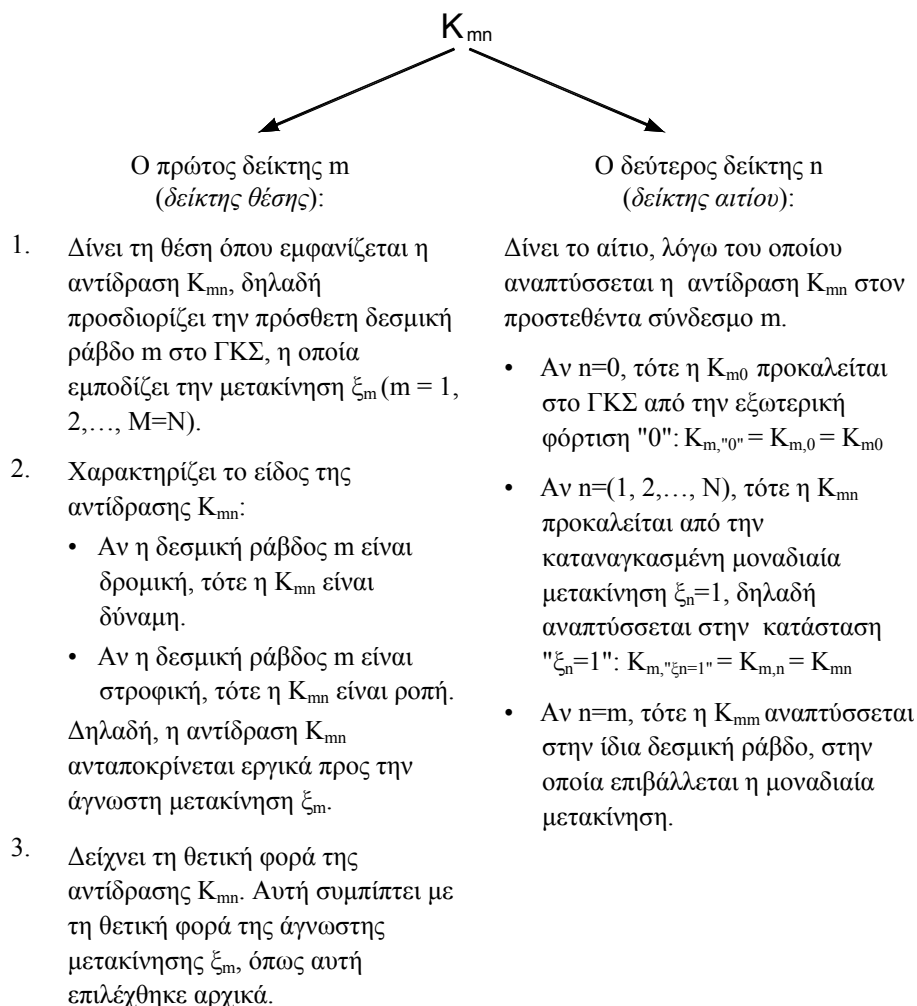


(β) Διάγραμμα Williot (μόνο διανύσματα μετατόπισης, χωρίς δοκούς)

Σχήμα E.5 Το βασικό πρόβλημα προσδιορισμού της μετατοπισμένης θέσης c' ενός κόμβου c με τη βοήθεια του διαγράμματος Williot.

E4. Η φυσική σημασία των συντελεστών K_{mn} και K_{m0}

Τα εντασιακά μεγέθη (αντιδράσεις), που δημιουργούνται στους πρόσθετους συνδέσμους του γεωμετρικού κυρίου συστήματος (ΓΚΣ), συμβολίζονται ενιαία με το σύμβολο K (ασχέτως από το αν πρόκειται για δυνάμεις ή ροπές), όπως άλλωστε και στη ΜΔ συμβολίζονται με το ενιαίο σύμβολο δ όλα τα μεγέθη παραμόρφωσης, που δημιουργούνται στις θέσεις των καταλυθέντων συνδέσμων στο στατικό κύριο σύστημα (ασχέτως από το αν πρόκειται για μετατοπίσεις ή στροφές). Οι δύο κάτω δείκτες m και n της αντίδρασης K_{mn} έχουν ανάλογο νόημα με εκείνο που έχουν οι αντίστοιχοι δείκτες της παραμόρφωσης δ_{mn} στη ΜΔ, δηλαδή:



E5. Η αρχή των δυνατών έργων για τον υπολογισμό των K_{mn} και K_{m0}

Οι αντιδράσεις K_{m0} (συντελεστές φόρτισης) και K_{mn} (συντελεστές στιβαρότητας) στις προστεθείσες δεσμικές ράβδους του ΓΚΣ, μπορούν να υπολογιστούν, είτε από τις συνθήκες ισορροπίας των κόμβων του φορέα, είτε με τη βοήθεια της αρχής των δυνατών έργων (ΑΔΕ).

Για τον υπολογισμό αντιδράσεων-ροπών, που αναπτύσσονται στις *στροφικές* δεσμικές ράβδους που δεσμεύουν τις στροφές των κόμβων του ΓΚΣ, οι συνθήκες ισορροπίας ροπών περί τον εκάστοτε κόμβο και η ΑΔΕ απαιτούν τον ίδιο όγκο αριθμητικών πράξεων, διότι πρακτικά οδηγούν σε ταυτόσημες εξισώσεις.

Αντίθετα, η χρησιμοποίηση των συνθηκών ισορροπίας για τον υπολογισμό των αντιδράσεων σε *δρομικές* δεσμικές ράβδους απαιτεί την προηγούμενη γνώση, όχι μόνον των επικόμβιων ροπών, αλλά και των τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων σε όλες τις καταστάσεις "0" και " $\xi_n=1$ " ($n=1, \dots, N$). Αν αντί των συνθηκών ισορροπίας χρησιμοποιήσουμε την ΑΔΕ, τότε για τον υπολογισμό των αντιδράσεων αυτών, αρκεί απλά και μόνον η γνώση των επικόμβιων ροπών του ΓΚΣ. Μειώνονται, έτσι, δραστικά οι απαιτούμενες αριθμητικές πράξεις και, υπό αυτήν την έννοια, η εφαρμογή της ΑΔΕ είναι προτιμητέα, ιδίως όταν επιλύουμε ατενείς φορές.

Ακολουθώντας, υπενθυμίζουμε το περιεχόμενο της ΑΔΕ και τον τρόπο εφαρμογής της. Σύμφωνα, λοιπόν, με την ΑΔΕ, η οποία σημειωτέον ονομάζεται και αρχή των δυνατών (ή νοητών) μετακινήσεων, το δυνατό έργο που παράγεται από ένα σύνολο ισορροπούμενων εντασιακών μεγεθών (δυνάμεων, ροπών) κατά μία δυνατή μετακίνησή τους είναι μηδενικό. Και αντίστροφα: Αν το έργο που παράγεται από ένα σύνολο εντασιακών μεγεθών κατά μία τυχούσα δυνατή μετακίνησή τους είναι μηδενικό, τότε τα εντασιακά αυτά μεγέθη βρίσκονται σε ισορροπία. Η ΑΔΕ γράφεται συμβολικά ως εξής:

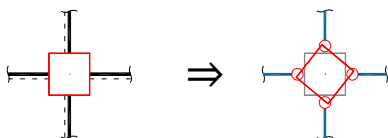
$$\sum [\delta \text{δυνατών έργων}] = \sum W^v = \sum W_e^v + \sum W_i^v = 0, \tag{1}$$

όπου $\sum W_e^v =$ το σύνολο των εξωτερικών δυνατών έργων,
 $\sum W_i^v =$ το σύνολο των εσωτερικών δυνατών έργων.

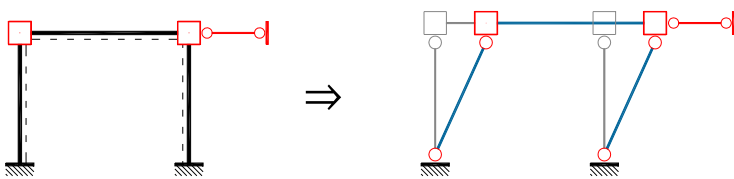
Αν πρόκειται για δυνατή μετακίνηση μιας κινηματικής αλυσίδας (δηλαδή ενός χαλαρού φορέα), τότε προφανώς δεν παράγεται εσωτερικό δυνατό έργο, διότι αυτή κατά τη μετακίνησή της δεν παραμορφώνεται και, συνεπώς, τα εσωτερικά εντασιακά μεγέθη είναι μηδενικά. Στην περίπτωση αυτή, η παραπάνω έκφραση (1) της ΑΔΕ απλοποιείται ως εξής:

$$\sum W_e^v = 0 \tag{2}$$

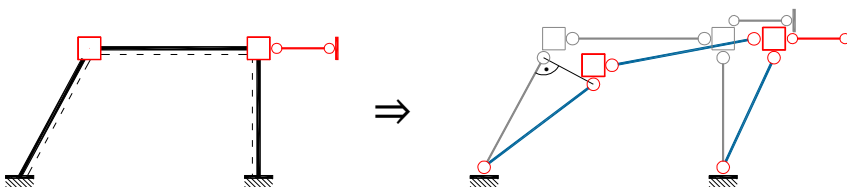
Η μη παραγωγή εσωτερικών δυνατών έργων κατά τη δυνατή μετακίνηση είναι ιδιαίτερα επιθυμητή, διότι, έτσι, απαλλασσόμαστε από τις ολοκληρώσεις που απαιτούνται για τον υπολογισμό των εσωτερικών δυνατών έργων που παράγονται κατά μήκος όλων των δομικών στοιχείων. Για να μπορέσει, όμως, να χρησιμοποιηθεί η απλοποιημένη μορφή (2) της ΑΔΕ για τον υπολογισμό των αντιδράσεων K_{m0} και K_{mn} , που αναπτύσσονται στο ΓΚΣ, θα πρέπει να μετατραπεί το τμήμα του ΓΚΣ, στο οποίο δρουν αυτές, σε μια κινηματική αλυσίδα και μάλιστα, κατά προτίμηση, με τρόπο τέτοιο, ώστε μόνο η εκάστοτε ζητούμενη αντίδραση να παράγει δυνατό έργο. Αυτό επιτυγχάνεται με κατάλληλη παρεμβολή αρθρώσεων στα άκρα των στοιχείων του ΓΚΣ, όπως φαίνεται στα παραδείγματα του ακόλουθου σχήματος Ε.6.



(α) Προσθήκη αρθρώσεων γύρω από τον κόμβο για να τον καταστήσουν χαλαρό



(β) Προσθήκη αρθρώσεων στα άκρα των στύλων του ορθογωνικού πλαισίου



(γ) Προσθήκη αρθρώσεων στα άκρα των στύλων και του ζυγώματος του πλαισίου

Σχήμα Ε.6 Δημιουργία μονοβάθμιων κινηματικών αλυσίδων (α) σε κόμβο, (β) σε μονόροφο ορθογωνικό πλαίσιο και (γ) σε μονόροφο πλαίσιο με λοξό στύλο.

Προκειμένου, όμως, να διατηρηθεί η προϋπάρχουσα ισορροπούσα εντασιακή κατάσταση που επικρατεί στο ΓΚΣ στις καταστάσεις "0" και " $\xi_n=1$ " ($n=1, \dots, N$), προσάγουμε στις θέσεις των αρθρώσεων αυτών τις (εσωτερικές διπλές) ροπές κάμψης, που αναπτύσσονται στο ΓΚΣ στην εκάστοτε εξεταζόμενη κατάσταση. Οι

ροπές αυτές δρουν τώρα ως εξωτερικά φορτία. Κατόπιν, επιβάλλουμε (χωρίς ανάγκη άσκησης δύναμης) στη δεσμική ράβδο m , της οποίας την αντίδραση K_{m0} ή K_{mn} θέλουμε να υπολογίσουμε, μια δυνατή (νοητή) μετακίνηση $\xi_m=1^v$. Προφανώς, από τη δυνατή αυτή μετακίνηση δημιουργούνται μετακινήσεις μόνο στο τμήμα του ΓΚΣ που έχουμε μετατρέψει σε μονοβάθμια κινηματική αλυσίδα, ενώ ο υπόλοιπος φορέας παραμένει αμετακίνητος. Καταγράφοντας τώρα τα εξωτερικά δυνατά έργα, που παράγουν τα εντασιακά μεγέθη της εκάστοτε εξεταζόμενης ισορροπούσας κατάστασης επί των εργικά αντιστοίχων δυνατών μετακινήσεων των σημείων δράσης τους, και εξισώνοντας το άθροισμα των δυνατών έργων με το μηδέν, παίρνουμε μια εξίσωση για τη κάθε φορά ζητούμενη αντίδραση K_{m0} ή K_{mn} .

Ε6. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Σύμφωνα με τα όσα αναπτύσσονται στην παράγραφο 3.2.6 του [2], πιθανές περιπτώσεις λάθους κατά την επίλυση φορέων με την MM είναι μεταξύ άλλων οι εξής:

- (1) Λανθασμένη επιλογή του ΓΚΣ (π.χ., λόγω λανθασμένης τοποθέτησης των πρόσθετων δεσμικών ράβδων, οι μοναδιαίες καταστάσεις " $\xi_n=1$ " είναι γραμμικά εξαρτημένες μεταξύ τους).
- (2) Παραβίαση σε κάποια ενδιάμεση κατάσταση (" 0 ", " $\xi_n=1$ ") των συνθηκών συμβιβαστού (π.χ. λόγω λανθασμένης θεώρησης των παραμορφώσεων του ΓΚΣ)
- (3) Λανθασμένος υπολογισμός των αντιδράσεων K_{m0} και K_{mn}
- (4) Λανθασμένη ή ανακριβής επίλυση του συστήματος εξισώσεων
- (5) Λανθασμένη εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας για τον υπολογισμό των τελικών μεγεθών.

Προκειμένου να αποφευχθούν τέτοια λάθη κατά τη διάρκεια της επίλυσης, ή έστω να εντοπιστούν μετά το πέρας των υπολογισμών, συνιστάται η διενέργεια ελέγχων που συνοψίζονται στο ακόλουθο διάγραμμα συστηματικού εντοπισμού λαθών (Σχ. Ε.7).

Σύμφωνα με αυτό, η ορθότητα των υπολογισμών στα βήματα 2, 3 και 6 ελέγχεται κατ' αρχάς μέσω ενός ικανοποιητικού πλήθους *ελέγχων συμβιβαστού*, τόσο στο ΓΚΣ (ενδιάμεσες καταστάσεις " 0 " και " $\xi_n=1$ "), όσο και (μετά τον υπολογισμό των τελικών μεγεθών έντασης) στον δεδομένο γεωμετρικά αόριστο φορέα. Οι έλεγχοι συμβιβαστού, οι οποίοι διενεργούνται με τη βοήθεια της πρότασης αναγωγής (βλ. [2], παράγρ. 3.2.6), είναι συνήθως:

- έλεγχοι μηδενισμού των μετατοπίσεων (u, w, φ) σε ακλόνητες στηρίξεις ή
- έλεγχοι μηδενισμού της διαφοράς μετακινήσεων ($\Delta u, \Delta w, \Delta \varphi$) σε ενδιάμεσα σημεία του φορέα.

Τα πιθανά λάθη, που ενδέχεται να αποκαλυφθούν με τους ελέγχους αυτούς, ανάγονται στην μη ικανοποίηση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων/μετακινήσεων σε εκείνες τις θέσεις, στις οποίες είχαν προστεθεί δεσμικές ράβδοι.

Δύο ενδιάμεσοι έλεγχοι που οφείλουν να γίνονται *πάντοτε* αφορούν στην διαπίστωση:

- της συμμετρίας του μητρώου στιβαρότητας (Σύμφωνα με τη 2η πρόταση αμοιβαιότητας των Maxwell-Mohr ισχύει: $K_{mn}=K_{nm}$) και
- του θετικού προσήμου των διαγώνιων συντελεστών στιβαρότητας (Όλες οι συνεισφορές στο K_{mm} πρέπει να είναι θετικές, $K_{mm}>0$).

Μη συμμετρικό και μη θετικώς ορισμένο μητρώο στιβαρότητας οφείλεται σε λάθη που έχουν γίνει στα βήματα 2 ή/και 3 ή/και 4.

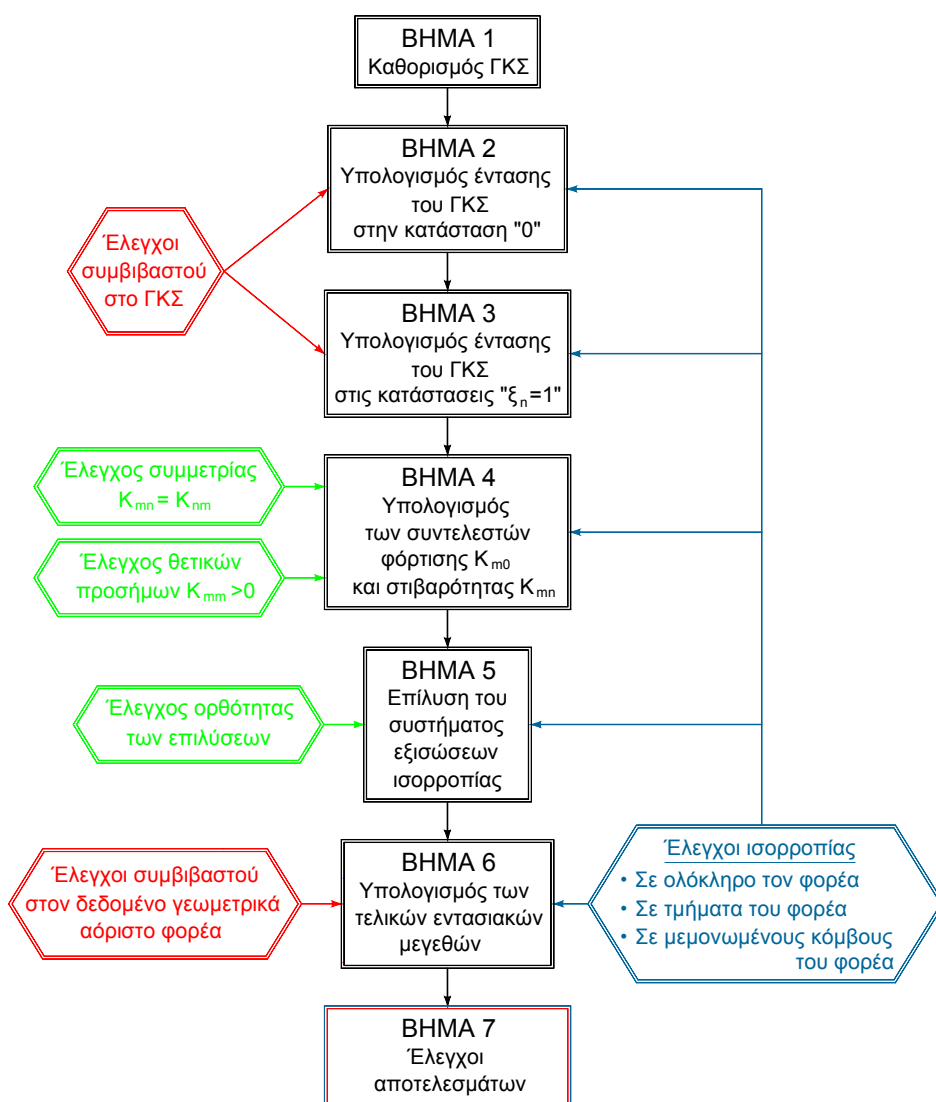
Ένας ακόμη ενδιάμεσος έλεγχος, που είναι σκόπιμο να γίνεται πριν προχωρήσει κανείς στο βήμα 6, είναι ο έλεγχος της ορθής επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων ισορροπίας $[K_{mn}] \cdot [\xi_m] + [K_{m0}] = [0]$. Ο έλεγχος αυτός γίνεται με εισαγωγή των τιμών ξ_m των υπολογισθεισών τιμών των αγνώστων ξ_m στις επιλύουσες εξισώσεις και διαπίστωση της ικανοποίησης ή μη ικανοποίησής τους. Τέλος, μετά το πέρας των υπολογισμών και την εύρεση των τελικών εντασιακών μεγεθών, οφείλουν να διενεργούνται *ισορροπιακοί έλεγχοι*, οι οποίοι είναι *οι ουσιαστικοί έλεγχοι της MM*. Για να θεωρηθεί ο έλεγχος των αποτελεσμάτων πλήρης, θα πρέπει να περικλείει την επιρροή όλων των N υπεράριθμων γεωμετρικών μεγεθών. Αυτό σημαίνει, ότι το ελάχιστο πλήθος των ανεξάρτητων μεταξύ τους ελέγχων ισορροπίας, πρέπει να είναι ίσο με τον βαθμό N γεωμετρικής αοριστίας του φορέα. Οι συνθήκες ισορροπίας πρέπει να ικανοποιούνται για όλον τον φορέα, καθώς και για οποιοδήποτε τμήμα του.

Οι έλεγχοι ισορροπίας μπορούν να γίνουν:

- είτε χρησιμοποιώντας τις συνθήκες ισορροπίας (τρεις για επίπεδους φορείς: $\Sigma P_x=0, \Sigma P_z=0, \Sigma M_y=0$, έξι για χωρικούς: $\Sigma P_x=0, \Sigma P_y=0, \Sigma P_z=0, \Sigma M_x=0, \Sigma M_y=0, \Sigma M_z=0$)
- είτε εφαρμόζοντας την αρχή των δυνατών μετακινήσεων (ΑΔΕ).

Συνήθειες ισορροπιακοί έλεγχοι είναι οι εξής:

- Σε ολόκληρο τον φορέα προς έλεγχο των αντιδράσεων στις στηρίξεις.
- Σε τμήμα του φορέα για έλεγχο συγκεκριμένων φορτίων διατομής ή/και αντιδράσεων στήριξης (π.χ., έλεγχος ενός συγκεκριμένου ορόφου ενός πολυωρόφου πλαισίου).
- Σε μεμονωμένους κόμβους του φορέα προς έλεγχο των επικόμβιων φορτίων διατομής.



Σχήμα Ε.7 Διάγραμμα συστηματικού εντοπισμού λαθών.

Ε7. Βιβλιογραφία

Το υλικό του παρόντος ηλεκτρονικού βιβλίου αντλήθηκε από τα εξής τρία έντυπα συγγράμματα, κυρίως δε από το τρίτο:

[1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

[2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙ: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

[3] Αβραμίδης, Ι.Ε. & Μορφίδης, Κ.Ε. (2007). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙβ: Η κλασική μέθοδος των μετακινήσεων - Σύνοψη θεωρίας και ασκήσεις*. Θεσσαλονίκη: Σοφία.

Για περαιτέρω μελέτη προτείνονται τα ακόλουθα συγγράμματα :

Επιλογή ελληνόφωνης βιβλιογραφίας:

Βαλιάσης, Θ. (2013). *Στατική των γραμμικών φορέων*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

Κωμοδρόμος, Π. (2009). *Ανάλυση Κατασκευών - Σύγχρονες μέθοδοι με χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών*. Λευκωσία: Παπασωτηρίου.

Μητσοπούλου, Ε. (2009). *Κλασικές και μητρικές μέθοδοι ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Σοφία

Νιτσιώτας, Γ. (1980). *Στατική των γραμμικών φορέων, Πρώτος τόμος: Κλασική Στατική*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

Νιτσιώτας, Γ. & Τσαμικιράνη-Γεωργανοπούλου, Α. (1977). *Στατική των Κατασκευών - Γενική επισκόπηση των φορέων και των μεθόδων*. Θεσσαλονίκη: Ζήτη

Σταυρίδης, Λ. (2008). *Στατική των δομικών φορέων - Μία βασική προσέγγιση στη φέρουσα συμπεριφορά και το σχεδιασμό τους, Μέρος Α και Μέρος Β'*. Αθήνα: Κλειδάριθμος

Επιλογή αγγλόφωνης βιβλιογραφίας

Chajes, A. (1983). *Structural Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

[Καλύπτει με απλό, κατανοητό και σύντομο τρόπο ισοστατικούς και υπερστατικούς φορείς, συμπεριλαμβανομένων και των μητρικών μεθόδων.]

Ghali, A., Neville, A.M. & Brown, T.G. (2003). *Structural Analysis - A Unified Classical and Matrix Approach*. New York: Spon Press.

[Αναφέρεται εκτενώς σε μεθόδους επίλυσης υπερστατικών φορέων και καλύπτει πέραν αυτών πολλά άλλα πεδία της Στατικής και Δυναμικής των Κατασκευών (π.χ., θεωρία 2ης τάξης και ελαστική ευστάθεια, ανάλυση πλακών, μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, πλαστική ανάλυση γραμμικών φορέων, θέματα προγραμματισμού κ.ά.).]

Norris, C.W., Wilbur, J.B. & Utku, S. (1991). *Elementary Structural Analysis*, McGraw Hill. Tokyo: Kogakusha.

[Καλύπτει με πολύ ικανοποιητικό τρόπο όλα τα βασικά αντικείμενα της Στατικής των Κατασκευών.]

West, H.H. (1980): *Analysis of Structures - An Integration of Classical and Modern Methods*. New York: John Wiley & Sons.

[Παρουσιάζει με αναλυτικό και εύληπτο τρόπο τις κλασικές μεθόδους της Στατικής συνδέοντάς τις εξαρχής με τις σύγχρονες μητρικές μεθόδους ανάλυσης.]

Επιλογή γερμανόφωνης βιβλιογραφίας:

Krätzig, W.B., Harte, R., Meskouris, K. & Wittek, U. (1999). *Tragwerke 1 - Theorie und Berechnungsmethoden statisch bestimmter*. Berlin: Auflage

Krätzig, W.B. & Wittek, U. (1998). *Tragwerke 2 - Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimmter*. Berlin: Auflage.

[Τα παραπάνω δύο γερμανικά συγγράμματα δίνουν μια πλήρη και εις βάθος παρουσίαση των κλασικών μεθόδων της Στατικής των γραμμικών φορέων, με τρόπο που προβάλλει έντονα τη μεθοδολογική δομή τους και τις σχέσεις τους με τις σύγχρονες μητρικές μεθόδους ανάλυσης.

Στις ακόλουθες δύο βιβλιογραφικές αναφορές παρουσιάζονται με πλήρη, αλλά σύντομο στη διατύπωση τρόπο οι μέθοδοι της Κλασικής Στατικής.]

Duddek, H. & Ahrens, H. (1998). *Statik der Stabtragwerke*. In: I, Teil, W, Verlag: *Betonkalender*. Berlin: Ernst & Sohn.

Hees, G. & Pohlmann, G. (1988). *Baustatik*. In: IV Bautechnik, *Konstruktiver Ingenieurbau 1 (Teil B)*, New York: Auflage.

Σχετικά με την ιστορική εξέλιξη της Στατικής:

Kurrer, K.E. (2008). *The History of the Theory of Structures - From Arch Analysis to Computational Mechanics*. Berlin: Ernst & Sohn..

Κεφάλαιο 1

Πάγιοι ατενείς φορείς υπό εξωτερικά φορτία και καταναγκασμούς

Σύνοψη

Οι ασκήσεις 1 έως 3 του κεφαλαίου αυτού αφορούν σε πάγιους ατενείς φορείς. Στην Άσκηση 1 γίνεται η επίλυση μιας δοκού δύο ανοιγμάτων υπό συνεχή ομοιόμορφα φορτία, θερμοκρασιακή φόρτιση Δt και καταναγκασμένη βύθιση με χρήση αμφίπακτων στοιχείων. Επίσης, σχολιάζεται η επίλυση για παραλλαγές της φόρτισης και του αρχικού φορέα. Στην Άσκηση 2 γίνεται επίλυση μιας δοκού δύο ανοιγμάτων με προέχον τμήμα (πάγιος φορέας κατόπιν αποκοπής ισοστατικού τμήματος) υπό συνεχή και συγκεντρωμένα φορτία με χρήση αμφίπακτων και μονόπακτων στοιχείων. Επίσης, σχολιάζεται η επίλυση για παραλλαγές του αρχικού φορέα. Τέλος, στην Άσκηση 3 επιλύεται ένα απλό πλαίσιο με προέχον τμήμα (πάγιος φορέας κατόπιν αποκοπής ισοστατικού τμήματος) υπό ομοιόμορφη θερμοκρασιακή φόρτιση και υπολογίζεται η μετατόπιση ενός σημείου του.

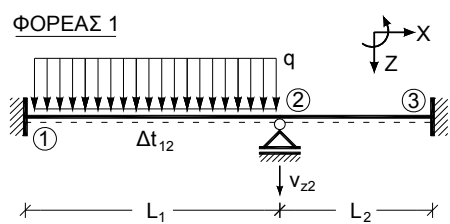
Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων (βλ. π.χ. [2]-κεφ.3). Προς τούτο, απαιτείται καλή γνώση της Στατικής των ισοστατικών φορέων, καθώς και επαρκής εξοικείωση με τη Μέθοδο των υπεραριθμών δυνάμεων για υπερστατικούς φορείς (βλ. π.χ. [1] και [2]-κεφ.2, καθώς και λοιπή σχετική βιβλιογραφία της παραγράφου Ε7).

Άσκηση 1

Εκφώνηση

1. Για τον φορέα 1 του σχήματος 1.0 ζητούνται τα εξής:
 - α. Να επιλεγεί (με σχετική αιτιολόγηση) το γεωμετρικό κύριο σύστημα (ΓΚΣ). Τι θα άλλαζε, εάν η δυστένεια EA των δοκών ήταν πεπερασμένη;
 - β. Να επιλυθεί με τη ΜΜ και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών M και τεμνουσών Q για ταυτόχρονη δράση των q , v_{z2} και Δt_{12} .
 - γ. Να διευκρινιστεί σε ποιά σημεία διαφοροποιείται η διαδικασία επίλυσης για κάθε μία από τις τρεις αυτές καταστάσεις φόρτισης.
2. Πώς διαφοροποιείται το ΓΚΣ και η επίλυση των φορέων 2 και 3 έναντι εκείνης του φορέα 1, όταν η φόρτιση αποτελείται μόνον από το φορτίο q στο άνοιγμα 1-2;
3. Μπορεί να υπολογιστεί το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων N των φορέων 1, 2 και 3;

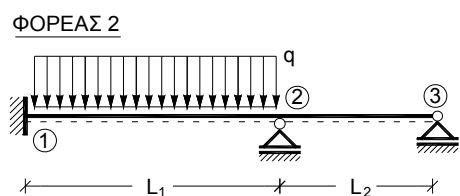


ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία

$L_1=5.00\text{m}$

$L_2=3.00\text{m}$

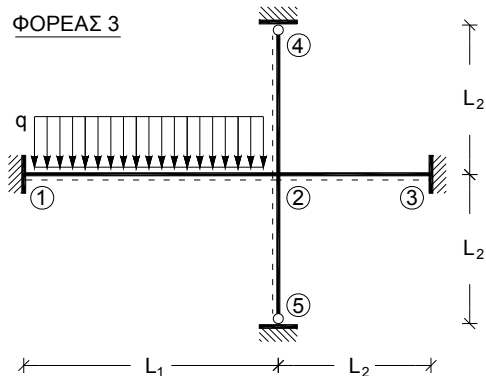


Φόρτιση

$q=15\text{kN/m}$

$v_{z2}=0.03\text{m}$

$\Delta t_{12}=+25^\circ\text{C}$



Δοκοί / Στύλοι

$EI=10^5 \text{ kNm}^2$

$EA \rightarrow GA_s \rightarrow \infty$

$\alpha_t=1,2 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

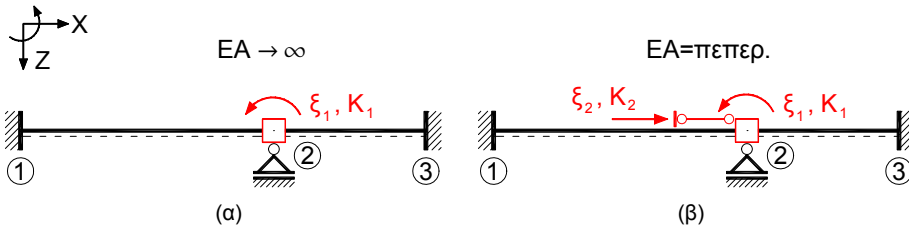
$h=0.60\text{m}$

Σχήμα 1.0 Δεδομένοι φορείς - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

1α. Καθορισμός του γεωμετρικού κυρίου συστήματος (ΓΚΣ)

Οι κόμβοι 1 και 3 του φορέα 1 είναι πλήρως πακτωμένοι και, επομένως, δεν μπορούν να εμφανίσουν ούτε μετατοπίσεις ούτε στροφές. Ο κόμβος 2 δεν μπορεί να μετατοπιστεί κατακορύφως, λόγω της ακλόνητης κατά z στήριξής του. Επίσης, ούτε και οριζοντίως μπορεί να μετατοπιστεί, διότι αυτό θα σήμαινε αυξομείωση του μήκους των εκατέρωθεν δοκών, κάτι που απαγορεύει η παραδοχή της ατένειας. Έτσι, ως μοναδικός βαθμός ελευθερίας, δηλαδή μοναδική δυνατότητα μετακίνησης, απομένει η στροφή του κόμβου αυτού. Άρα, το ΓΚΣ προκύπτει πακτώνοντας (δικινητά) τον κόμβο 2 (Σχ. 1.1(α)).



Σχήμα 1.1 Το ΓΚΣ του φορέα 1 για (α) ατενείς και (β) μη ατενείς δοκούς.

Στην περίπτωση κατά την οποία η δυστένεια των δοκών είναι πεπερασμένη, ο κόμβος 2 αποκτά τη δυνατότητα οριζόντιας μετατόπισης (δηλαδή μετατόπισης κατά τη διεύθυνση του άξονα x). Επομένως, στην περίπτωση αυτή το ΓΚΣ προκύπτει με ταυτόχρονη (δικινητή) πάκτωση και οριζόντια παγίωση του κόμβου 2 (Σχ. 1.1(β)).

1β. Επίλυση του φορέα με τη μέθοδο μετακινήσεων

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Το ΓΚΣ του (ατενούς) φορέα 1 καθορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και είναι αυτό του σχήματος 1.1α.

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"

Η κατάσταση "0" είναι η κατάσταση κατά την οποία επιβάλλεται η εξωτερική φόρτιση στο ΓΚΣ ενός φορέα. Στην παρούσα περίπτωση, η εξωτερική φόρτιση συντίθεται από τρία διαφορετικά φορτιστικά αίτια (q, v_{z2} και Δt₁₂). Επομένως, τα μεγέθη έντασης της κατάστασης "0" προκύπτουν από την επαλληλία των μεγεθών έντασης που αναπτύσσονται λόγω του καθενός από τα τρία αυτά φορτιστικά αίτια. Στο παρακάτω σχήμα 1.2 δίνονται οι παραμορφωμένες μορφές του ΓΚΣ για κάθε ένα φορτιστικό αίτιο ξεχωριστά, καθώς και τα απαιτούμενα για την περαιτέρω πορεία επίλυσης μεγέθη έντασης, όπως αυτά προκύπτουν από τους τύπους του Πίνακα 1α.

$$M_{12,0}^q = \frac{q \cdot L_{12}^2}{12} = \frac{15 \cdot 5^2}{12} = 31.25 \text{ kNm}$$

$$M_{21,0}^q = -M_{12,0}^q = -31.25 \text{ kNm}$$

$$\psi_{12,0}^{vz2} = \frac{0 - v_{z2}}{L_{12}} = \frac{-0.03}{5} = -0.006$$

$$\psi_{23,0}^{vz2} = \frac{v_{z2} - 0}{L_{23}} = \frac{0.03}{3} = 0.01$$

$$M_{12,0}^{vz2} = -6 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}}\right) \cdot \psi_{12,0}^{vz2} = -6 \cdot \left(\frac{10^5}{5}\right) \cdot (-0.006) = 720 \text{ kNm}$$

$$M_{21,0}^{vz2} = M_{12,0}^{vz2}$$

$$M_{23,0}^{vz2} = -6 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}}\right) \cdot \psi_{23,0}^{vz2} = -6 \cdot \left(\frac{10^5}{3}\right) \cdot (0.01) = -2000 \text{ kNm}$$

$$M_{32,0}^{vz2} = M_{23,0}^{vz2}$$

$$M_{12,0}^{\Delta t} = EI \cdot \left(\frac{\alpha_t \cdot \Delta t}{h}\right) =$$

$$= 10^5 \cdot \left(\frac{1.2 \cdot 10^{-5} \cdot 25}{0.6}\right) = 50 \text{ kNm}$$

$$M_{21,0}^{\Delta t} = -M_{12,0}^{\Delta t}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Παρά την εμφάνιση καμπτικών ροπών, η παραμόρφωση είναι μηδενική.

Σχήμα 1.2 Παραμόρφωση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" και αναπτυσσόμενες ροπές για κάθε μία από τις τρεις φορτίσεις.

Βιντεοπαρουσίαση που αφορά στην καταναγκασμένη βύθιση v_{z2} :
<https://www.youtube.com/watch?v=6Eck9SZYL3U&feature=youtu.be>

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας και με βάση το παραπάνω σχήμα μπορούν να υπολογιστούν οι ροπές της κατάστασης "0" του ΓΚΣ ως άθροισμα των αντίστοιχων ροπών λόγω των τριών επί μέρους φορτιστικών αιτιών:

$$M_{12,0} = M_{12,0}^q + M_{12,0}^{vz2} + M_{12,0}^{\Delta t} = 31.25 + 720 + 50 = 801.25 \text{ kNm}$$

$$M_{21,0} = M_{21,0}^q + M_{21,0}^{vz2} + M_{21,0}^{\Delta t} = -31.25 + 720 - 50 = 638.75 \text{ kNm}$$

$$M_{23,0} = M_{23,0}^q + M_{23,0}^{vz2} + M_{23,0}^{\Delta t} = 0 - 2000 + 0 = -2000 \text{ kNm}$$

$$M_{32,0} = M_{32,0}^q + M_{32,0}^{vz2} + M_{32,0}^{\Delta t} = 0 - 2000 + 0 = -2000 \text{ kNm}$$

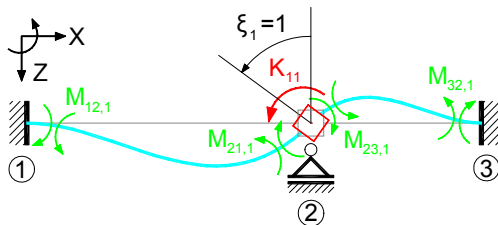
Υπενθύμιση (βλ. [2], παράγρ. 3.1.3):

Τα βελάκια που συμβολίζουν εντασιακά μεγέθη σχεδιάζονται πάντοτε έτσι, ώστε να δείχνουν τη συμβατικά θετική φορά του μεγέθους που συμβολίζουν (ροπή, δύναμη). Η πραγματική φορά ενός εντασιακού μεγέθους προκύπτει από την απεικονιζόμενη συμβατικά θετική φορά σε συνδυασμό με το πρόσημό του.

Διαφορετική σύμβαση σχεδίασης ισχύει για τα βελάκια που συμβολίζουν μετακινήσεις: Αυτά σχεδιάζονται κατά κανόνα έτσι, ώστε να δείχνουν την πραγματική φορά του μεγέθους που συμβολίζουν (μετατόπιση, στροφή). Κατά συνέπεια, αν η πραγματική φορά τους είναι αντίθετη προς τη συμβατικά θετική φορά (π.χ. στο παράδειγμά μας η στροφή $\psi_{12,0}$, βλ. Σχ. 1.2), τότε δίπλα στο βελάκι γράφεται το σύμβολο του μεγέθους με μείον (στο παράδειγμά μας $-\psi_{12,0}$).

Βήμα 3. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης " $\xi_1=1$ "

Η κατάσταση " $\xi_1=1$ " είναι η κατάσταση κατά την οποία επιβάλλεται στο ΓΚΣ μία θετική (σύμφωνα το χρησιμοποιούμενο σύστημα αναφοράς X-Z) μοναδιαία μετακίνηση κατά την έννοια του δεσμευμένου βαθμού ελευθερίας. Στη δική μας περίπτωση επιβάλλεται μία μοναδιαία στροφή στον κόμβο 2, λόγω της οποίας το ΓΚΣ παραμορφώνεται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.3 Παραμόρφωση (ποιοτικά) του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " και αναπτυσσόμενες ροπές.

Βιντεοπαρουσίαση του σχήματος 1.3: https://www.youtube.com/watch?v=9oxywy_t9ds&feature=youtu.be

Οι αναπτυσσόμενες καμπτικές ροπές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (βλ. Πίνακα 1):

$$M_{12,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot 1 = 40000 \text{ kNm}$$

$$M_{21,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 4 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot 1 = 80000 \text{ kNm}$$

$$M_{23,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 4 \cdot \left(\frac{10^5}{3} \right) \cdot 1 = 133333.33 \text{ kNm}$$

$$M_{32,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{3} \right) \cdot 1 = 66666.667 \text{ kNm}$$

Παρατήρηση σχετικά με τις μονάδες μέτρησης ροπών στην μοναδιαία κατάσταση " $\xi_1=1$ ":

Εφόσον η επιβαλλόμενη μοναδιαία στροφή $\xi_1=1$ είναι αδιάστατη (Σημ.: Κανονικά οι στροφές μειούνται σε [rad]), οι μονάδες μέτρησης των αναπτυσσόμενων στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " ροπών $M_{ik,1}$ είναι όχι [kNm], αλλά [kNm/rad]. Εντούτοις, κατά κανόνα παραλείπεται το '/rad' και οι ροπές δίνονται σε [kNm].

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης (εδώ: K_{11} και K_{10})

Ο συντελεστής στιβαρότητας K_{11} είναι η αντίδραση (ροπή) που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 στην κατάσταση " $\xi_1=1$ ". Από την ισορροπία ροπών (σχήμα 1.3) προκύπτει:

$$K_{11} = M_{21,1} + M_{23,1} = 80000 + 133333.33 = 213333.33 \text{ kNm}$$

Παρατηρούμε ότι όχι μόνο η τελική τιμή, αλλά και οι δύο «συνεισφορές» στο K_{11} είναι θετικές.

Ο συντελεστής φόρτισης (φορτιστικός όρος) K_{10} είναι η αντίδραση (ροπή) που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 στην κατάσταση "0". Από την ισορροπία ροπών (σχήμα 1.2) προκύπτει:

$$K_{10} = M_{21,0} + M_{23,0} = -1361.25 \text{ kNm}$$

Βήμα 5. Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων και υπολογισμός των ξ_1 (εδώ: ξ_1)

Η ολική αντίδραση K_1 , που εμφανίζεται στη θέση του κόμβου 2, όπου τοποθετήθηκε η δικινητή πάκτωση, προκύπτει από την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας και είναι:

$$K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10}$$

Η αντίδραση αυτή, ως μη υπάρχουσα στον πραγματικό φορέα αλλά μόνον στο γεωμετρικό κύριο σύστημα, οφείλει να μηδενιστεί. Από την απαίτηση (συνθήκη) μηδενισμού της προκύπτει και η άγνωστη τιμή της στροφής ξ_1 του κόμβου 2:

$$K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10} = 0 \Rightarrow \xi_1 = -\left(\frac{K_{10}}{K_{11}}\right) = 6.381 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Παρατήρηση:

Λόγω της θεώρησης της επιβαλλόμενης μοναδιαίας στροφής στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " ως αδιάστατης, οι ροπές $M_{ik,1}$ και, επομένως, και η αντίδραση K_{11} μετριούνται σε [kNm/rad]. Κατά συνέπεια, η τελική μετακίνηση (στροφή ξ_1) προκύπτει με τη σωστή διάσταση [rad]. Πάντως, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως στο βήμα 3, η μονάδα μέτρησης [rad] κατά κανόνα παραλείπεται.

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Διαγράμματα καμπτικών ροπών M λόγω q , v_{z2} και Δt_{12}

Ο υπολογισμός των τελικών μεγεθών M του φορέα επιτυγχάνεται με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$M_{ij} = M_{ij,0} + M_{ij,1} \cdot \xi_1$$

Εφαρμόζοντας την σχέση αυτή για τους κόμβους 1, 2 και 3 προκύπτουν:

$$M_{12} = M_{12,0} + \xi_1 \cdot M_{12,1} = 801.25 + (6.381 \cdot 10^{-3}) \cdot 40000 = 1056.484 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = M_{21,0} + \xi_1 \cdot M_{21,1} = 638.75 + (6.381 \cdot 10^{-3}) \cdot 80000 = 1149.219 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = M_{23,0} + \xi_1 \cdot M_{23,1} = -2000 + (6.381 \cdot 10^{-3}) \cdot 133333.33 = -1149.219 \text{ kNm}$$

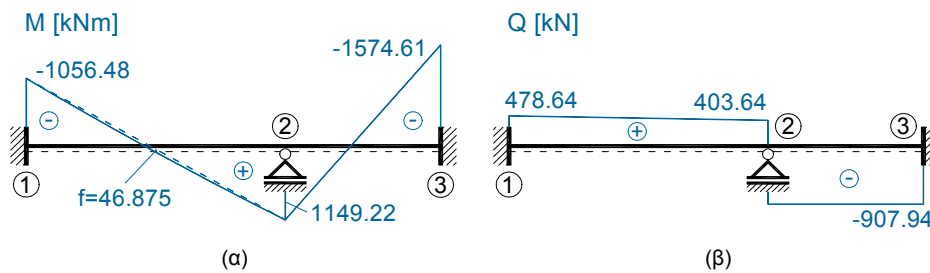
$$M_{32} = M_{32,0} + \xi_1 \cdot M_{32,1} = -2000 + (6.381 \cdot 10^{-3}) \cdot 66666.667 = -1574.61 \text{ kNm}$$

Προκειμένου να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών, απαιτείται μετασχηματισμός των προσήμων των υπολογισθεισών ροπών με βάση τη σύμβαση της ίνας αναφοράς. Προς τούτο θα πρέπει να αντιστραφεί το πρόσημο των ροπών στα αριστερά άκρα των δοκών (εδώ: ροπές M_{12} και M_{23}), ενώ το πρόσημο των ροπών στα δεξιά άκρα των δοκών παραμένει το ίδιο (εδώ: ροπές M_{21} και M_{32}).

Έτσι, οι τιμές των ροπών που θα χρησιμοποιηθούν για τη σχεδίαση του διαγράμματος ροπών (βλ. Σχ. 1.4(α)) είναι οι εξής:

$$M_{12} = -1056.484 \text{ kNm} \quad M_{21} = 1149.219 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 1149.219 \text{ kNm} \quad M_{32} = -1574.61 \text{ kNm}$$

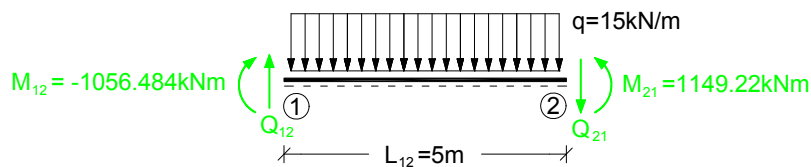


Σχήμα 1.4 Διαγράμματα M και Q λόγω ταυτόχρονης δράσης των q , Δt και v_{z2} .

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων Q λόγω q , v_{z2} και Δt_{12}

Οι τελικές τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται από τις ήδη υπολογισθείσες τελικές καμπτικές ροπές με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας, οι οποίες εφαρμόζονται για κάθε δοκό ξεχωριστά, αφού προηγουμένως την αποσπάσουμε από τον φορέα με μία νοητή τομή, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:

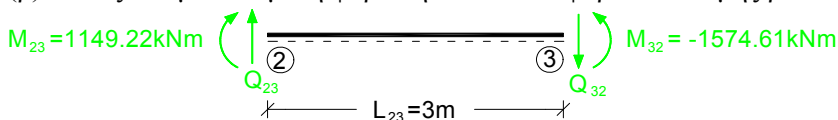
(α) Δοκός 1-2 με δεδομένη φόρτιση και τελικά φορτία διατομής βάσει ίνας αναφοράς:



$$\Sigma M_{(2)} = 0 \Rightarrow Q_{12} = \left(\frac{q \cdot L_{12}}{2} \right) + \left(\frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} \right) = \frac{15 \cdot 5}{2} + \frac{1149.22 - (-1056.484)}{5} = 478.64 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_{(1)} = 0 \Rightarrow Q_{21} = - \left(\frac{q \cdot L_{12}}{2} \right) + \left(\frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} \right) = - \frac{15 \cdot 5}{2} + \frac{1149.22 - (-1056.484)}{5} = 403.64 \text{ kN}$$

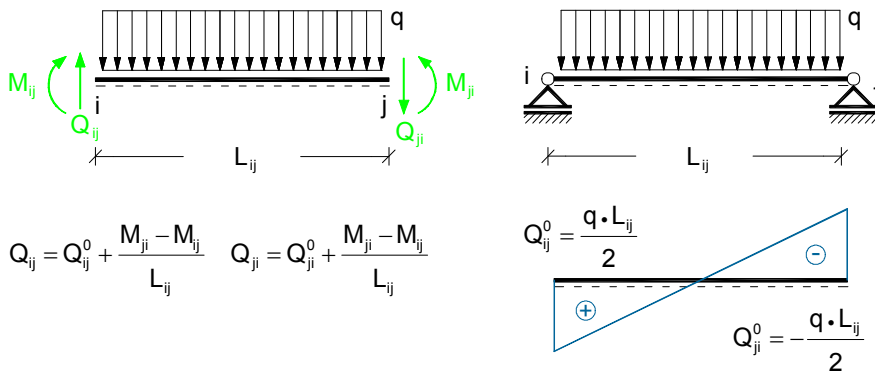
(β) Δοκός 2-3 με δεδομένη φόρτιση και τελικά φορτία διατομής βάσει ίνας αναφοράς:



$$\Sigma M_{(3)} = 0 \Rightarrow Q_{23} = \left(\frac{M_{32} - M_{23}}{L_{23}} \right) = \frac{(-1574.61) - (1149.22)}{3} = -907.94 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_{(2)} = 0 \Rightarrow Q_{32} = \left(\frac{M_{32} - M_{23}}{L_{23}} \right) = \frac{(-1574.61) - (1149.22)}{3} = -907.94 \text{ kN}$$

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι για τον υπολογισμό των τεμνουσών στα άκρα μιας δοκού μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι τύποι που δίνονται στο ακολουθό σχήμα 1.5, όπου M_{ij} , M_{ji} οι τελικές καμπτικές ροπές στα άκρα της δοκού αυτής και Q_{ij0} , Q_{ji0} οι τέμνουσες στα άκρα της ομόλογης αμφιέριστης δοκού $i-j$ λόγω των φορτιστικών αιτιών. Όλα τα μεγέθη εισάγονται με τα πρόσημα τους βάσει ίνας αναφοράς.



Σχήμα 1.5 Υπολογισμός των τελικών τεμνουσών δυνάμεων από τις τελικές ροπές.

Στην παρούσα περίπτωση, από τα φορτιστικά αίτια μόνον η κατανεμημένη φόρτιση q προκαλεί την εμφάνιση τεμνουσών δυνάμεων σε αμφιέριστη δοκό. Αντίθετα, τα άλλα δύο φορτιστικά αίτια (Δt και v_{z2}) είναι καταναγκασμοί και, επομένως, δεν προκαλούν ένταση σε μια αμφιέριστη (ισοστατική) δοκό.

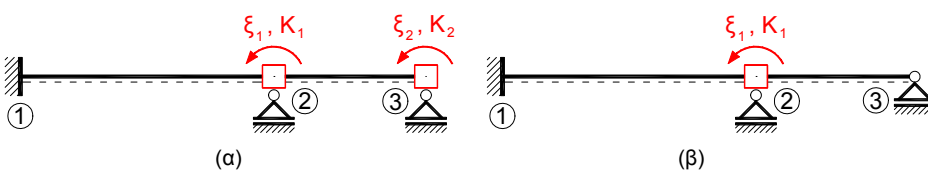
1γ. Πώς διαφοροποιείται η διαδικασία επίλυσης για τις τρεις καταστάσεις φόρτισης:

Από την παραπάνω αναλυτική παρουσίαση της διαδικασίας υπολογισμού προκύπτει, ότι το μόνο σημείο διαφοροποίησης όσον αφορά στα φορτιστικά αίτια q , v_{z2} και Δt_{12} είναι ο υπολογισμός της αντίδρασης παγίωσης που αναπτύσσεται στην κατάσταση "0". Διαφοροποιείται δηλαδή μόνον η τιμή του K_{10} . Αντίθετα, ο συντελεστής στιβαρότητας K_{11} δεν επηρεάζεται από την εξωτερική φόρτιση, διότι εκφράζει τις μηχανικές (στατικές) ιδιότητες του ίδιου του φορέα. Οι ιδιότητες αυτές του φορέα προκύπτουν από τη γεωμετρία του (εδώ: L_{ij} , A , A_S , I) και από τα υλικά χαρακτηριστικά του (εδώ: E , G , α_t).

2. Πώς διαφοροποιείται το ΓΚΣ και η επίλυση των φορέων 2 και 3 έναντι εκείνης του φορέα 1, όταν η φόρτιση αποτελείται μόνον από το φορτίο q στο άνοιγμα 1-2:

(α) Φορέας 2

Το σημείο στο οποίο διαφοροποιείται ο φορέας 2 από τον φορέα 1, είναι η στήριξη του κόμβου 3. Με την προϋπόθεση χρήσης μόνον πινάκων αμφιπάκτων δοκών, το ΓΚΣ του φορέα 2 προκύπτει με τη δικινητή πάκτωση των κόμβων 2 και 3. Επομένως, στην περίπτωση αυτή ο φορέας έχει δύο υπεράριθμα γεωμετρικά μεγέθη (Σχ. 1.6(α)).



Σχήμα 1.6 Το ΓΚΣ του φορέα 2: (α) με χρήση αποκλειστικώς πινάκων αμφιπάκτων δοκών, (β) με χρήση πινάκων αμφιπάκτων και μονοπάκτων δοκών.

Αντίθετα, με τη χρήση πινάκων και για μονόπακτες δοκούς, αρκεί να πακτωθεί ο κόμβος 2, οπότε ο φορέας μπορεί να θεωρηθεί ως μία φορά γεωμετρικά αδύνατος (Σχ. 1.6(β)). Στην περίπτωση αυτή, η μόνη διαφοροποίηση έναντι του, επίσης μία φορά γεωμετρικά αδύνατου φορέα 1, εμφανίζεται κατά την επίλυση και εντοπίζεται στον υπολογισμό της αντίδρασης K_{11} της δικινητής πάκτωσης του κόμβου 2 στην κατάσταση " $\xi_1=1$ ":

Φορέας 1 και Φορέας 2, ΓΚΣ (α):

$$K_{11} = M_{21,1} + M_{23,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) + 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) = 4 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) + 4 \cdot \left(\frac{10^5}{3} \right) = 2.13 \cdot 10^5 \text{ kNm}$$

Φορέας 2, ΓΚΣ (β):

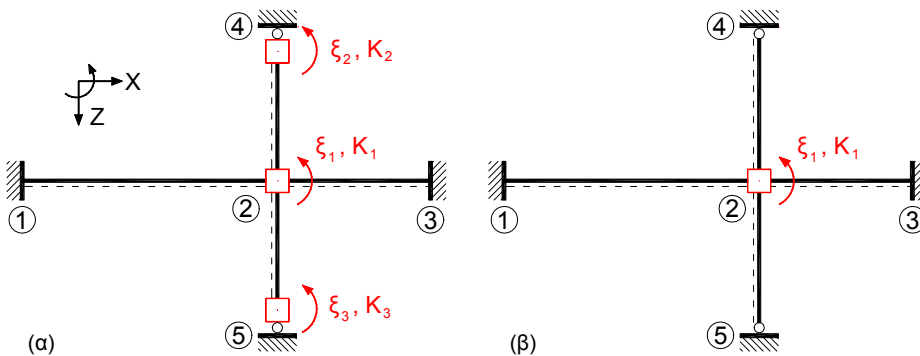
$$K_{11} = M_{21,1} + M_{23,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) + 3 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) = 4 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) + 3 \cdot \left(\frac{10^5}{3} \right) = 1.80 \cdot 10^5 \text{ kNm}$$

Ο φορτιστικός όρος K_{10} είναι ίδιος στον φορέα 1 και στον φορέα 2 (ασχέτως ΓΚΣ), διότι η φορτιζόμενη δοκός 1-2 είναι σε όλες τις περιπτώσεις αμφίπακτη. Σε περίπτωση, όμως, που χρησιμοποιείται το ΓΚΣ (β) του φορέα 2 και ασκείται φορτίο στη δοκό 2-3, το K_{10} θα διαφοροποιηθεί αναλόγως.

Επισημαίνεται, επίσης, ότι η επίλυση με χρήση του ΓΚΣ (α) θα μας δώσει αυτόματα και την τιμή της στροφής φ_3 του δεξιού άκρου της δοκού 2-3 του φορέα 2. Αντίθετα, σε περίπτωση χρήσης του ΓΚΣ (β) η τιμή αυτή θα πρέπει να υπολογιστεί, εφόσον μας χρειάζεται, σε ένα δεύτερο βήμα, μετά την κυρίως επίλυση του φορέα.

(β) Φορέας 3

Η διαφοροποίηση του φορέα 3 έναντι του φορέα 1 συνίσταται στο ότι η στήριξη που είχε ο κόμβος 2 έδωσε τη θέση της σε δύο κατακόρυφα στοιχεία, την κατακόρυφη δοκό 2-4 και την κατακόρυφη δοκό 2-5, που αμφότερες συνδέονται μονολιθικά στον κόμβο 2 με τις δύο οριζόντιες δοκούς 1-2 και 2-3. Με την προϋπόθεση χρήσης μόνον πινάκων αμφιπάκτων δοκών, το ΓΚΣ του φορέα 2 προκύπτει με τη δικινητή πάκτωση των κόμβων 2, 4 και 5. Επομένως, στην περίπτωση αυτή ο φορέας έχει τρία υπεράριθμα γεωμετρικά μεγέθη (Σχ. 1.7(α)).



Σχήμα 1.7 Το ΓΚΣ του φορέα 3: (α) με χρήση αποκλειστικώς πινάκων αμφιπάκτων δοκών, (β) με χρήση πινάκων αμφιπάκτων και μονοπάκτων δοκών.

Αντίθετα, με τη χρήση πινάκων και για μονόπακτες δοκούς αρκεί να πακτωθεί ο κόμβος 2, οπότε ο φορέας μπορεί να θεωρηθεί ως μία φορά γεωμετρικά αδύνατος (Σχ. 1.7(β)). Στην περίπτωση αυτή η μόνη διαφοροποίηση έναντι του, επίσης μία φορά γεωμετρικά αδύνατου φορέα 1, εμφανίζεται κατά την επίλυση και εντοπίζεται στον υπολογισμό της αντίδρασης K_{11} της δικινητής πάκτωσης του κόμβου 2 στην κατάσταση " $\xi_1=1$ ":

Φορέας 3, ΓΚΣ (α):
$$K_{11} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) + 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) + 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) + 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{25}} \right)$$

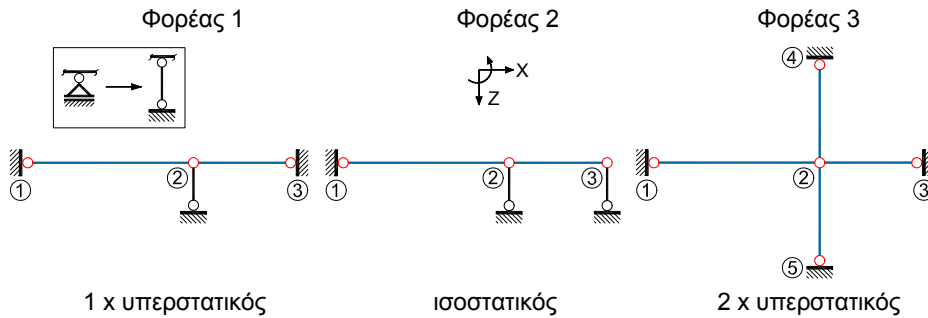
Φορέας 3, ΓΚΣ (β):
$$K_{11} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) + 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) + 3 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) + 3 \cdot \left(\frac{EI}{L_{25}} \right)$$

Ο φορτιστικός όρος K_{10} είναι ίδιος στον φορέα 1 και στον φορέα 3 (ασχέτως ΓΚΣ), διότι η φορτιζόμενη δοκός 1-2 είναι σε όλες τις περιπτώσεις αμφίπακτη. Σε περίπτωση, όμως, που ασκούνται φορτία και στις άλλες δοκούς, το K_{10} θα διαφοροποιηθεί αναλόγως.

Επισημαίνεται, επίσης, ότι η επίλυση με χρήση του ΓΚΣ (α) θα μας δώσει αυτόματα και τις τιμές των στροφών φ_4 και φ_5 . Αντίθετα, σε περίπτωση χρήσης του ΓΚΣ (β) οι τιμές αυτές θα πρέπει να υπολογιστούν, εφόσον μας χρειάζονται, σε ένα δεύτερο βήμα, μετά την κυρίως επίλυση του φορέα.

3. Μπορεί να υπολογιστεί το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων N των φορέων 1, 2 και 3:

Οι σχηματισμοί ράβδων των φορέων 1, 2 και 3 φαίνονται στο σχήμα 1.8.



Σχήμα 1.8 Οι σχηματισμοί ράβδων των φορέων 1, 2 και 3.

Είναι σαφές ότι:

- α. ο σχηματισμός ράβδων του φορέα 2 είναι ισοστατικός και, επομένως, ο φορέας είναι πάγιος, και
- β. οι σχηματισμοί ράβδων των φορέων 1 και 3 είναι υπερστατικοί και, επομένως, οι φορείς αυτοί είναι υπερπάγιοι.

Άρα (βλ. [2], παράγρ. 3.3.6):

- Οι αξονικές δυνάμεις του φορέα 2 μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας και μόνον. Έτσι, από την ισορροπία όλων των δυνάμεων κατά τη διεύθυνση του άξονα x προκύπτει άμεσα ότι τόσο η οριζόντια αντίδραση στην άκτωση 1 όσο και οι αξονικές δυνάμεις των δύο δοκών 1-2 και 2-3 είναι ίσες με το μηδέν.

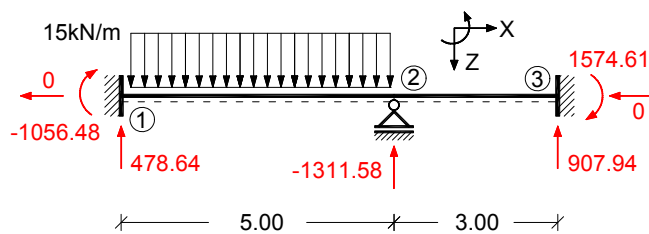
- Οι αξονικές δυνάμεις των φορέων 1 και 3 δεν μπορούν να υπολογιστούν μόνο με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας. Ο υπολογισμός τους δεν μπορεί να γίνει, παρά μόνο αν άρουμε την παραδοχή της απένειας και επιλύσουμε εκ νέου τον φορέα λαμβάνοντας υπόψη τους επιπλέον βαθμούς ελευθερίας (τα επιπλέον άγνωστα μεγέθη μετακίνησης) που συνεπάγεται η άρση αυτή. Για τον φορέα 2 θα έχουμε ως επιπλέον βαθμό ελευθερίας την οριζόντια μετατόπιση του κόμβου 2, ενώ για τον φορέα 3 θα έχουμε ως επιπλέον βαθμούς ελευθερίας την οριζόντια και την κατακόρυφη μετατόπιση του κόμβου 2.

Σημείωση :

Πάντως για τον φορέα 1, αποτελούμενο από δύο οριζόντιες εν σειρά ράβδους με μόνο κατακόρυφη φόρτιση και με καταναγκασμούς που προκαλούν μόνο εγκάρσια επιπόνηση, είναι διαισθητικά προφανές ότι οι αξονικές δυνάμεις πρέπει να είναι μηδενικές.

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολούθως διενεργούνται τρεις ισορροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (Σχ. 1.9).



$$\sum F_x = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 478.64 - 1311.58 + 907.94 - (15 \cdot 5) = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -1056.48 + 1574.61 + (1311.58 \cdot 5) - (907.94 \cdot 8) + \left(15 \cdot \frac{5^2}{2} \right) = 0.01 \approx 0 \text{ kNm}$$

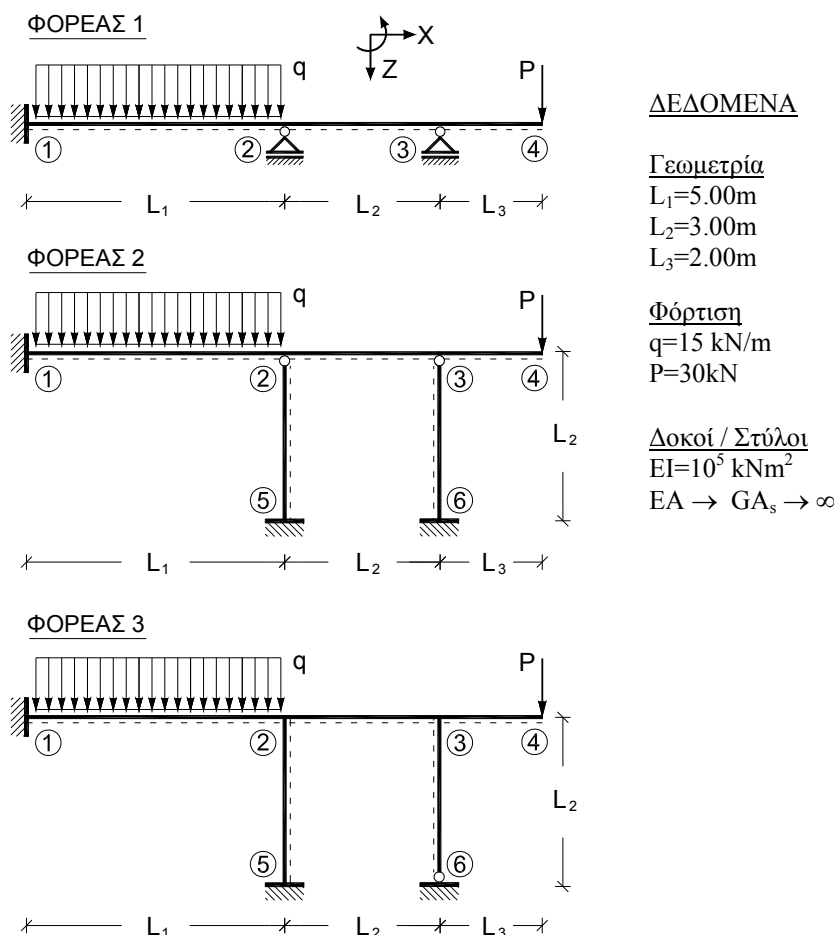
Σχήμα 1.9 Ισορροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Οι παραπάνω τρεις συνθήκες ισορροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισορροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Άσκηση 2

Εκφώνηση

1. Για τον φορέα 1 του σχήματος 2.0 ζητούνται τα εξής:
 - α. Να επιλεγεί (με σχετική αιτιολόγηση) το γεωμετρικό κύριο σύστημα (ΓΚΣ). Πώς διαφοροποιείται η διαδικασία επίλυσης έναντι της αντίστοιχης διαδικασίας του φορέα 2 της Άσκησης 1;
 - β. Να επιλυθεί με τη ΜΜ και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών M και τεμνουσών Q για ταυτόχρονη δράση των q και P .
2. Πώς διαφοροποιείται το ΓΚΣ και η διαδικασία επίλυσης των φορέων 2 και 3 έναντι εκείνης του φορέα 1;



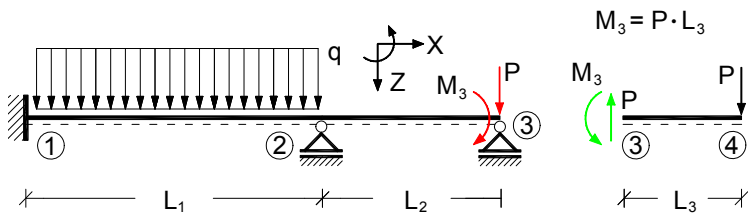
Σχήμα 2.0 Δεδομένοι φορείς - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

1α. Καθορισμός του γεωμετρικού κυρίου συστήματος (ΓΚΣ)

Προκειμένου να επιλεγεί το ΓΚΣ με το μικρότερο δυνατό πλήθος αγνώστων μετακινήσεων, θα πρέπει κατ' αρχάς να ελεγχθεί αν υπάρχουν ή όχι ισοστατικά τμήματα. Εφόσον υπάρχουν ισοστατικά τμήματα, τα επιλύουμε με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας και τα αφαιρούμε από τον αρχικό φορέα υποκαθιστώντας τα από τις αντιδράσεις τους στα σημεία σύνδεσης. Οι αντιδράσεις αυτές δρουν πλέον ως εξωτερικά φορτία στον εναπομένοντα φορέα.

Στη δική μας περίπτωση, ο δεδομένος φορέας 1 έχει ένα ισοστατικό τμήμα, τη δοκό 3-4. Η αφαίρεση και υποκατάστασή της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.1.



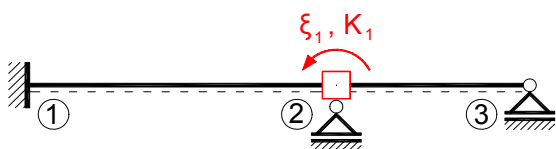
Σχήμα 2.1 Η διαδικασία αφαίρεσης του ισοστατικού τμήματος 3-4 από τον φορέα 1.

Από τη σύγκριση του σχήματος 2.1 και του σχήματος 1.0 της Άσκησης 1, προκύπτει ότι ο εδώ προς επίλυση φορέας 1, είναι ίδιος με τον φορέα 2 της Άσκησης 1. Η διαφορά των δύο προβλημάτων συνίσταται μόνο στη διαφορετική τους φόρτιση. Επομένως, το ζητούμενο ΓΚΣ είναι όμοιο με αυτό που δίνεται στο σχήμα 1.6β της Άσκησης 1.

1β. Επίλυση με την αναλυτική διαδικασία της μεθόδου μετακινήσεων:

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

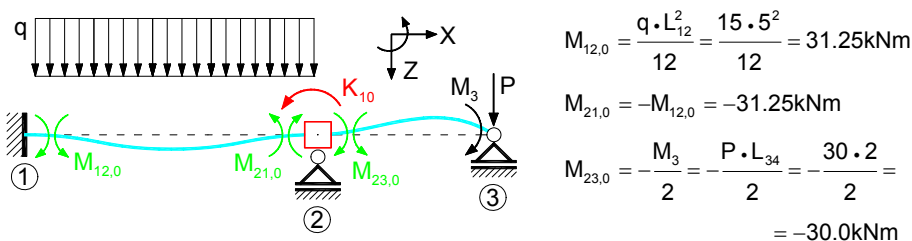
Το ΓΚΣ του (ατενούς) φορέα 1 καθορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και απεικονίζεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2 Το ΓΚΣ του φορέα 1 (με χρήση πινάκων αμφιπάκτων και μονοπάκτων δοκών).

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"

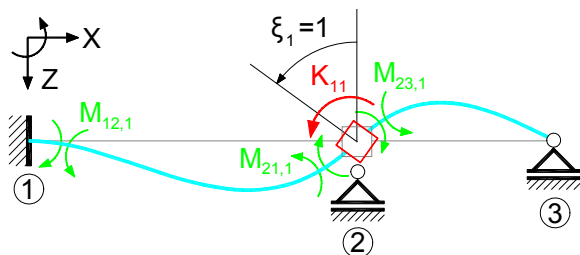
Όπως ήδη είπαμε, το μοναδικό σημείο διαφοροποίησης του δεδομένου φορέα 1 από τον φορέα 2 της άσκησης 1, είναι η εξωτερική φόρτιση. Επομένως, διαφορετική θα είναι τόσο η παραμορφωμένη μορφή όσο και η αναπτυσσόμενη ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" (Σχ. 2.3).



Σχήμα 2.3 Παραμόρφωση (ποιοτικά) του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" και αναπτυσσόμενες ροπές.

Βήμα 3. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "ξ₁=1"

Η κατάσταση "ξ₁=1" είναι η κατάσταση κατά την οποία επιβάλλεται στο ΓΚΣ μία θετική (σύμφωνα το χρησιμοποιούμενο σύστημα αναφοράς X-Z) μοναδιαία μετακίνηση, κατά την έννοια του δεσμευμένου βαθμού ελευθερίας. Στη δική μας περίπτωση επιβάλλεται μία μοναδιαία στροφή στον κόμβο 2, λόγω της οποίας το ΓΚΣ παραμορφώνεται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4 Παραμόρφωση (ποιοτικά) του ΓΚΣ στην κατάσταση "ξ₁=1" και αναπτυσσόμενες ροπές.

Οι αναπτυσσόμενες καμπτικές ροπές δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$M_{12,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot 1 = 40000 \text{ kNm} \quad M_{21,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 80000 \text{ kNm}$$

$$M_{23,1} = 3 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 3 \cdot \left(\frac{10^5}{3} \right) \cdot 1 = 100000 \text{ kNm}$$

Υπενθύμιση:

Σχετικά με τις μονάδες μέτρησης των ροπών $M_{ik,1}$, βλ. παρατήρηση στο βήμα 3 της Άσκησης 1.

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης (εδώ: K_{11} και K_{10})

Ο συντελεστής στιβαρότητας K_{11} είναι η αντίδραση (ροπή) που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 στην κατάσταση " $\xi_1=1$ ". Από την ισορροπία ροπών (βλ. Σχ. 2.4) προκύπτει:

$$K_{11} = M_{21,1} + M_{23,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) + 3 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) = 4 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) + 3 \cdot \left(\frac{10^5}{3} \right) = 1.8 \cdot 10^5 \text{ kNm}$$

Παρατηρούμε ότι όχι μόνο η τελική τιμή, αλλά και οι δύο «συνεισφορές» στον συντελεστή σταβαρότητας K_{11} είναι θετικές.

Ο φορτιστικός όρος K_{10} είναι η αντίδραση (ροπή) που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 στην κατάσταση "0". Από την ισορροπία ροπών (βλ. Σχ. 2.3) προκύπτει:

$$K_{10} = M_{21,0} + M_{23,0} = -31.25 - 30.0 = -61.25 \text{ kNm}$$

Βήμα 5. Κατάστροψη του συστήματος εξισώσεων και υπολογισμός των ξ_1 (εδώ: ξ_1)

Η ολική αντίδραση K_1 , η οποία εμφανίζεται στον κόμβο 2 όπου τοποθετήθηκε η δικινητή πάκτωση, προκύπτει από την εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας και είναι:

$$K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10}$$

Η αντίδραση αυτή, ως μη υπάρχουσα στον πραγματικό φορέα αλλά μόνον στο ΓΚΣ, οφείλει να μηδενιστεί. Από την απαίτηση (συνθήκη) μηδενισμού της προκύπτει και η άγνωστη τιμή της στροφής ξ_1 του κόμβου 2:

$$K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10} = 0 \Rightarrow \xi_1 = -(-61.25/180000) = 3.403 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Διαγράμματα καμπτικών ροπών M

Ο υπολογισμός των φορτίων διατομής M και Q του φορέα επιτυγχάνεται με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας:

$$M_{12} = M_{12,0} + \xi_1 \cdot M_{12,1} = 31.25 + 3.403 \cdot 10^{-4} \cdot 40000 = 44.861 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = M_{21,0} + \xi_1 \cdot M_{21,1} = -31.25 + 3.403 \cdot 10^{-4} \cdot 80000 = -4.027 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = M_{23,0} + \xi_1 \cdot M_{23,1} = -30.0 + 3.403 \cdot 10^{-4} \cdot 100000 = 4.027 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = -M_3 = -P \cdot L_{34} = -30 \cdot 2 = -60 \text{ kNm}$$

Προκειμένου να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών, απαιτείται η προσαρμογή των προσήμων των υπολογισθεισών ροπών στη σύμβαση της ίνας αναφοράς. Προς τούτο θα πρέπει να αντιστραφεί το πρόσημο των ροπών στα αριστερά άκρα των δοκών (ροπές M_{12} και M_{23}), ενώ το πρόσημο των ροπών στα δεξιά άκρα των δοκών παραμένει το ίδιο (ροπές M_{21} και M_{32}). Έτσι, οι τιμές των ροπών που θα χρησιμοποιηθούν για τη σχεδίαση του διαγράμματος ροπών (βλ. Σχ. 2.6) είναι οι εξής:

$$M_{12} = -44.861 \text{ kNm} \quad M_{21} = -4.027 \text{ kNm} \quad M_{23} = -4.027 \text{ kNm} \quad M_{32} = M_{34} = -60.0 \text{ kNm}$$

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων Q

Όπως είδαμε στην Άσκηση 1, οι τελικές τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται από τις ήδη υπολογισθείσες τελικές καμπτικές ροπές με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας, οι οποίες εφαρμόζονται για κάθε δοκό ξεχωριστά, αφού προηγουμένως την αποσπάσουμε από τον φορέα με μία νοητή τομή. Για τις τελικές τέμνουσες παίρνουμε έτσι (βλ. Σχ. 2.6):

$$Q_{12} = \left(\frac{q \cdot L_{12}}{2} \right) + \left(\frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} \right) = \frac{15 \cdot 5}{2} + \frac{-4.027 - (-44.861)}{5} = 45.67 \text{ kN}$$

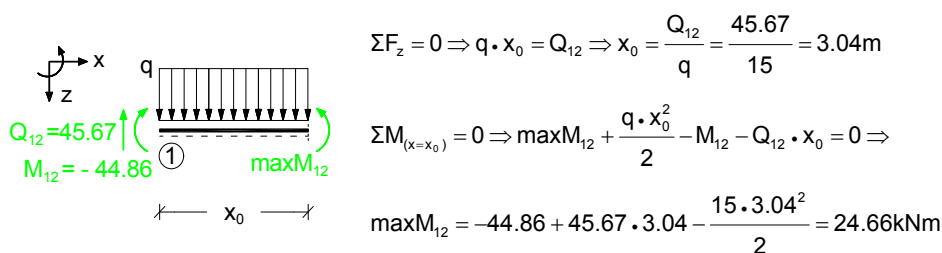
$$Q_{21} = - \left(\frac{q \cdot L_{12}}{2} \right) + \left(\frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} \right) = - \frac{15 \cdot 5}{2} + \frac{-4.027 - (-44.861)}{5} = -29.33 \text{ kN}$$

$$Q_{23} = Q_{32} = 0 + \left(\frac{M_{32} - M_{23}}{L_{23}} \right) = \frac{(-60.0) - (-4.027)}{3} = -18.66 \text{ kN}$$

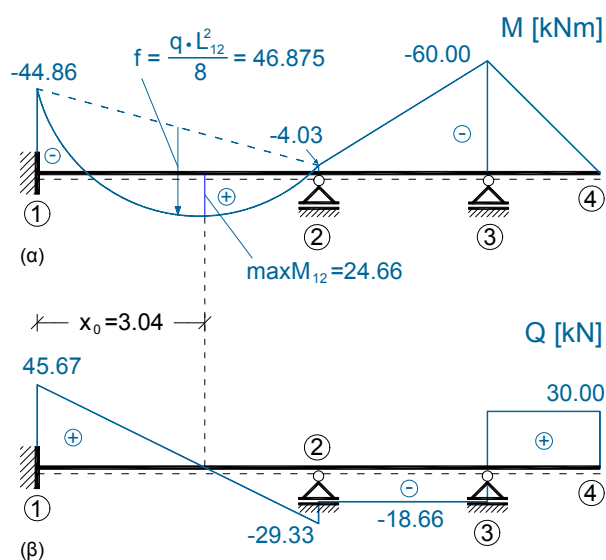
$$Q_{34} = Q_{43} = P = 30 \text{ kN}$$

(Οι καμπτικές ροπές στις παραπάνω σχέσεις εισάγονται με πρόσημα βάσει ίνας αναφοράς)

Η τιμή της μέγιστης καμπτικής ροπής $\max M_{12}$ στο άνοιγμα 1-2, καθώς και το σημείο όπου αυτή αναπτύσσεται (δηλ. το σημείο όπου μηδενίζεται η τιμή της τέμνουσας), υπολογίζονται από τις σχέσεις που δίνονται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5 Υπολογισμός της θέσης και της τιμής της μέγιστης καμπτικής ροπής στο άνοιγμα 1-2.



Σχήμα 2.6 Διαγράμματα M (α), και Q (β) του φορέα I λόγω ταυτόχρονης δράσης των q και P.

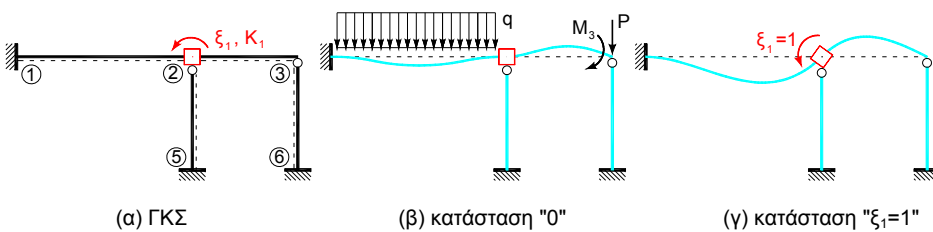
2. Πώς διαφοροποιείται το ΓΚΣ και η διαδικασία επίλυσης των φορέων 2 και 3 έναντι εκείνης του φορέα 1:

(α) Φορέας 2

Λόγω της ατένειας όλων των δομικών στοιχείων (δοκών και στύλων) οι κόμβοι 2 και 3 του φορέα 2 είναι αμετατόπιστοι, όπως και στον φορέα 1. Έτσι, μετά την απόσπαση του ισοστατικού προβόλου 3-4 και, προϋποθέτοντας ότι διατίθενται πίνακες όχι μόνο για την αμφίπακτη αλλά και για τη μονόπακτη δοκό, ο εναπομένον φορέας μπορεί να θεωρηθεί ως μία φορά γεωμετρικά αόριστος, με άγνωστη μετακίνηση τη στροφή του κόμβου 2. Επομένως, το γεωμετρικό κύριο σύστημά του προκύπτει με δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 (Σχ. 2.7(α)).

Επίσης, επειδή τα πρόσθετα (έναντι του φορέα 1) δομικά στοιχεία 2-5 και 3-6 είναι αφόρτιστα, η παραμόρφωση και η ένταση του ΓΚΣ των φορέων 1 και 2 στην κατάσταση "0" είναι η ίδια (σύγκρ. Σχ. 2.7(β) και Σχ. 2.3). Αλλά και φορτισμένα να ήταν τα στοιχεία 2-5 και 3-6, η αρθρωτή σύνδεσή τους με την οριζόντια δοκό δεν επιτρέπει τη μεταφορά ροπών. Για αυτό ο φορτιστικός όρος K_{10} παραμένει ίδιος, όπως και στον φορέα 1.

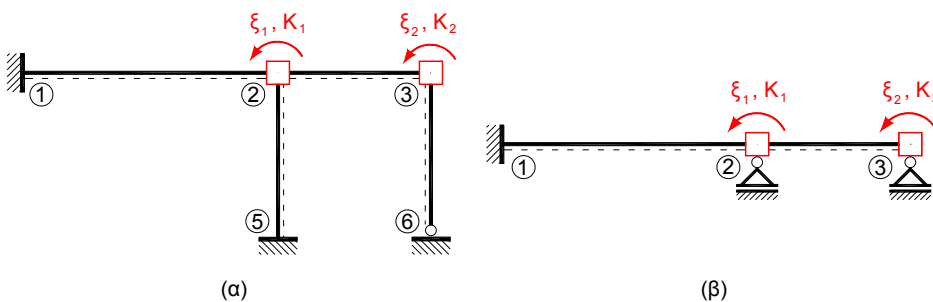
Τέλος, λόγω της αρθρωτής σύνδεσης των στύλων 2-5 και 3-6 στην οριζόντια δοκό, η μοναδιαία στροφή του κόμβου 2 στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " τους αφήνει απαραμόρφωτους (Σχ. 2.7(γ)). Άρα, η συνεισφορά τους στον συντελεστή στιβαρότητας K_{11} είναι μηδενική.



Σχήμα 2.7 Το ΓΚΣ και οι καταστάσεις "0" και " $\xi_1=1$ " του φορέα 2.

(β) Φορέας 3

Λόγω της ατένειας όλων των δομικών στοιχείων (δοκών και στύλων), οι κόμβοι 2 και 3 του φορέα 3 είναι αμετατόπιστοι, όπως και στους προηγούμενους φορείς 1 και 2. Έτσι, μετά την απόσπαση του ισοστατικού προβόλου 3-4, ο εναπομένον φορέας μπορεί να θεωρηθεί ως δύο φορές γεωμετρικά αόριστος, με άγνωστες μετακινήσεις τις στροφές των κόμβων 2 και 3 (Σχ. 2.8(α)). Επομένως, το γεωμετρικό κύριο σύστημά του προκύπτει με δικινητή πάκτωση των κόμβων 2 και 3 και είναι παρόμοιο με το ΓΚΣ του φορέα 1, αν θεωρήσουμε ότι έχουμε στη διάθεσή μας πίνακες μόνο για την αμφίπακτη δοκό (Σχ. 2.8(β)).

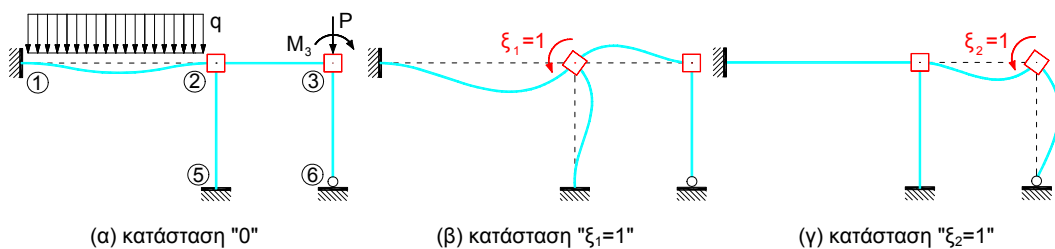


Σχήμα 2.8 (α) Το ΓΚΣ του φορέα 3, (β) Το ΓΚΣ του φορέα 1 (με αποκλειστική χρήση πινάκων αμφίπακτης δοκού).

Επίσης, επειδή τα πρόσθετα (έναντι του φορέα 1) δομικά στοιχεία 2-5 και 3-6 είναι αφόρτιστα, η παραμόρφωση και η ένταση του ΓΚΣ των φορέων 1 και 3 στην κατάσταση "0" είναι η ίδια (Σχ. 2.9(α)). Αν όμως τα στοιχεία 2-5 και 3-6 ήταν φορτισμένα, η μονολιθική (πλαισιακή) σύνδεσή τους με την οριζόντια δοκό στον φορέα 3 θα επέτρεπε τη μεταφορά ροπών. Έτσι, π.χ. ο φορτιστικός όρος K_{10} δεν θα είναι πλέον ίδιος με τον όρο K_{10} του φορέα 1.

Τέλος, λόγω της πλαισιακής σύνδεσης των στύλων 2-5 και 3-6 στην οριζόντια δοκό, οι μοναδιαίες στροφές των κόμβων 2 και 3 στις καταστάσεις " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ " προκαλούν και σε αυτούς καμπτική

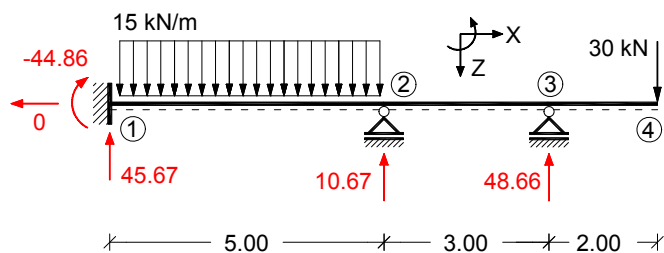
παραμόρφωση και ένταση (ροπές και τέμνουσες), και, επομένως, υπάρχει και δική τους συνεισφορά στους συντελεστές στιβαρότητας K_{11} , K_{22} και $K_{12} = K_{21}$, ασχέτως του αν είναι φορτισμένοι ή όχι (Σχ. 2.9 (β) και (γ)).



Σχήμα 2.9 Οι καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ " του φορέα 3.

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολούθως διενεργούνται τρεις ισορροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (βλ. Σχ. 2.10).



$$\sum F_x = 0 + 0 + 0 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 45.67 + 10.67 + 48.66 - (15 \cdot 5) - 30 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -44.86 - (10.67 \cdot 5) - (48.66 \cdot 8) + (30 \cdot 10) + \left(15 \cdot \frac{5^2}{2} \right) = 0.01 \approx 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 2.10 Ισορροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

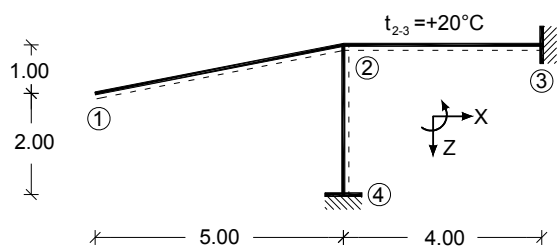
Οι τρεις παραπάνω συνθήκες ισορροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισορροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Άσκηση 3

Εκφώνηση

Για τον φορέα του σχήματος 3.0 ζητούνται:

- α. Να καθοριστεί (με σχετική αιτιολόγηση) το γεωμετρικό κύριο σύστημα (ΓΚΣ). Πώς διαφοροποιείται το ΓΚΣ, αν η δυστένεια EA των δοκών θεωρηθεί πεπερασμένη;
- β. Να επιλυθεί με τη ΜΜ και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών M και τεμνουσών Q λόγω της ομοιόμορφης θερμοκρασιακής μεταβολής $t_{2-3}=+20^\circ\text{C}$.
- γ. Να υπολογιστεί η βύθιση v_{z1} του άκρου 1.



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

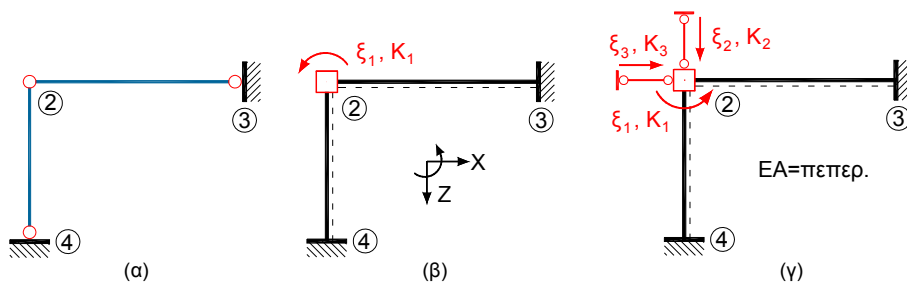
$EI=50000 \text{ kNm}^2$
 $EA \rightarrow GA_s \rightarrow \infty$
 $\alpha_t=1.2 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

Σχήμα 3.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

1α. Καθορισμός του γεωμετρικού κυρίου συστήματος (ΓΚΣ)

Καταρχάς αφαιρείται το ισοστατικό τμήμα 1-2, το οποίο ελλείψει φόρτισης είναι άτονο (δεν έχει ένταση). Ο σχηματισμός ράβδων του εναπομεινάντα φορέα είναι ισοστατικός, διότι ο μοναδικός ελεύθερος κόμβος 2 συνδέεται με το στερεό υπόβαθρο μέσω δύο ράβδων (Σχ. 3.1(α)). Επομένως, ο αποτελούμενος από ατενείς δοκούς φορέας είναι πάγιος (δεν υπάρχουν άγνωστες μετατοπίσεις κόμβων) και το μόνο άγνωστο μέγεθος είναι η στροφή του κόμβου 2. Το ΓΚΣ προκύπτει πακτώνοντας δικινητά τον κόμβο 2, (Σχ. 3.1(β)).



Σχήμα 3.1 (α) Σχηματισμός ράβδων του φορέα, (β) ΓΚΣ για $EA \rightarrow \infty$, (γ) ΓΚΣ για πεπερασμένη δυστένεια EA .

Εάν η δυστένεια EA των δοκών του φορέα θεωρηθεί πεπερασμένη, τότε οι δοκοί 2-3 και 2-4 μπορούν να υποστούν αξονικές παραμορφώσεις υπό την επίρεια εξωτερικών φορτίων. Επομένως, ο κόμβος 2 αποκτά δύο ακόμη βαθμούς ελευθερίας: τις μετατοπίσεις κατά X και κατά Z . Το ΓΚΣ προκύπτει, στην περίπτωση αυτή, από την ταυτόχρονη δικινητή πάκτωση και παγίωση του κόμβου 2 (Σχ. 3.1(γ)).

β. Επίλυση του φορέα με τη μέθοδο μετακινήσεων

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

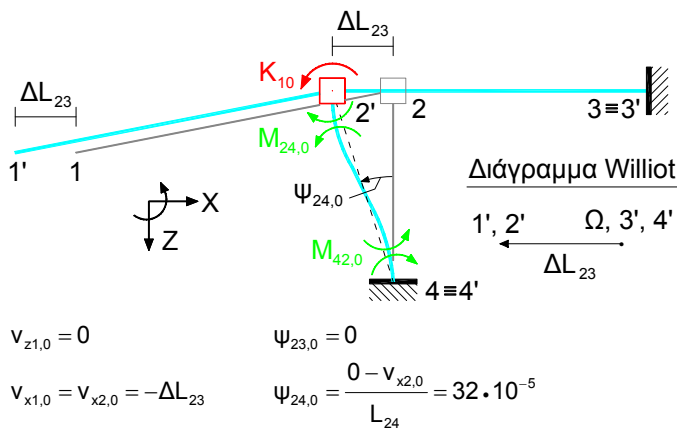
Το ΓΚΣ του (ατενούς) φορέα 1 καθορίστηκε στην προηγούμενη παράγραφο και είναι αυτό του σχήματος 3.1(β).

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"

Η κατάσταση "0" είναι η κατάσταση κατά την οποία επιβάλλεται η εξωτερική φόρτιση (εδώ: το θερμοκρασιακό φορτίο $t_{2-3}=20^{\circ}\text{C}$) στο ΓΚΣ του φορέα. Η παραδοχή της ατένειας σημαίνει ότι οι ελαστικές παραμορφώσεις των δοκών, κατά την έννοια του άξονά τους, θεωρούνται μηδενικές. Όμως, αξονικές παραμορφώσεις μπορούν να αναπτυχθούν και λόγω θερμοκρασιακής μεταβολής. Έτσι, το γεγονός ότι ο δεδομένος φορέας αποτελείται από ατενείς δοκούς και είναι πάγιος σημαίνει ότι ο κόμβος 2 δεν υφίσταται ελαστικές μετατοπίσεις υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων. Εντούτοις, η θετική θερμοκρασιακή μεταβολή $t_{2-3}=+20^{\circ}\text{C}$ προκαλεί μήκυνση (διαστολή) της δοκού 2-3 και άρα οριζόντια μετατόπιση του κόμβου 2. Η μήκυνση της δοκού 2-3 είναι:

$$\Delta L_{23} = t_{2-3} \cdot \alpha_t \cdot L_{23} = 20 \cdot (1.2 \cdot 10^{-5}) \cdot 4 = 96 \cdot 10^{-5} \text{m}$$

Στο παρακάτω σχήμα 3.2 δίνεται η παραμορφωμένη μορφή του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" και τα συνεπαγόμενα εντασιακά μεγέθη. Γενικώς, για τον καθορισμό των θέσεων των κόμβων στην παραμορφωμένη κατάσταση, απαιτείται η προσφυγή στο διάγραμμα Williot (βλ. παράγρ. Ε3). Όμως στην προκειμένη περίπτωση, ο προσδιορισμός της παραμορφωμένης κατάστασης είναι ιδιαίτερα απλός και διαισθητικά άμεσα κατανοητός: Ο μεν κόμβος 2, αφενός δεν μπορεί να μετατοπιστεί κατακορυφώς λόγω της ατένειας του στύλου 4-2, και αφετέρου αναγκαστικά μετατοπίζεται κατά ΔL_{2-3} προς τα αριστερά λόγω της διαστολής της θερμοκρασιακά φορτιζόμενης δοκού 2-3. Ο δε (άτονος) πρόβολος 2-1 δεν μπορεί παρά να μετατοπιστεί παράλληλα προς την αρχική του θέση. Έτσι, το διάγραμμα Williot είναι ιδιαίτερα απλό και για αυτό δεν είναι οπωσδήποτε απαραίτητο να σχεδιαστεί προκειμένου να προσδιοριστούν οι τελικές θέσεις 1' και 2' των κόμβων 1 και 2.



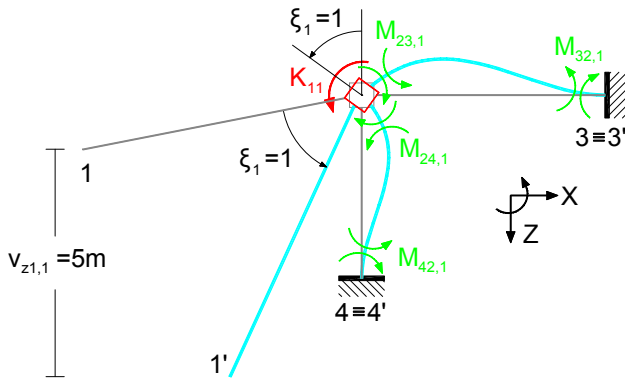
Σχήμα 3.2 Παραμόρφωση (ποιοτικά) του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" και αναπτυσσόμενες ροπές.

Οι ροπές $M_{24,0}$ και $M_{42,0}$ δίνονται από τη σχέση (βλ. Πίνακα 1):

$$M_{24,0} = M_{42,0} = -6 \cdot (E/L_{24}) \cdot \psi_{24,0} = -32 \text{kNm}$$

Βήμα 3. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης " $\xi_1=1$ "

Η κατάσταση " $\xi_1=1$ " είναι η κατάσταση κατά την οποία επιβάλλεται στο ΓΚΣ μία θετική (σύμφωνα το χρησιμοποιούμενο σύστημα αναφοράς X-Z) μοναδιαία μετακίνηση κατά την έννοια του δεσμευμένου βαθμού ελευθερίας. Στη δική μας περίπτωση, επιβάλλεται μία μοναδιαία στροφή στον κόμβο 2, λόγω της οποίας το ΓΚΣ παραμορφώνεται όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 3.3. Οι ροπές κάμψης στα άκρα των αμφίπακτων στοιχείων του ΓΚΣ υπολογίζονται βάσει των τύπων του Πίνακα 1.



$$M_{23,1} = 4 \cdot (EI/L_{23}) \cdot \varphi_2 = 5.00 \cdot 10^4 \text{ kNm} \quad M_{32,1} = 2.50 \cdot 10^4 \text{ kNm}$$

$$M_{24,1} = 4 \cdot (EI/L_{24}) \cdot \varphi_2 = 6.67 \cdot 10^4 \text{ kNm} \quad M_{42,1} = 3.33 \cdot 10^4 \text{ kNm}$$

Σχήμα 3.3 Παραμόρφωση (ποιοτικά) του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " και αναπτυσσόμενες ροπές.

Υπενθυμίζεται ότι όλοι οι υπολογισμοί κινούνται μέσα στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας (θεωρία 1^{ης} τάξης), όπου όλες οι μετακινήσεις θεωρούνται απειροστά μικρές. Βεβαίως, στα σχήματα οι μετακινήσεις σχεδιάζονται μεγάλες προκειμένου να φαίνονται καθαρά. Εξακολουθούν, όμως, να ισχύουν οι παραδοχές : $\tan\varphi=\varphi$, $\cos\varphi=1$, κτλ.

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης (εδώ: K_{11} και K_{10})

Ο συντελεστής στιβαρότητας K_{11} είναι η αντίδραση (ροπή) που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 στην κατάσταση " $\xi_1=1$ ". Από την ισορροπία ροπών στον κόμβο 2 για την κατάσταση " $\xi_1=1$ " (Σχ. 3.3) προκύπτει:

$$K_{11} - M_{24,1} - M_{23,1} = 0 \Rightarrow K_{11} = M_{24,1} + M_{23,1} = \left(\frac{35}{3}\right) \cdot 10^4 \text{ kNm}$$

Ο φορτιστικός όρος K_{10} είναι η αντίδραση (ροπή) που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 στην κατάσταση "0". Από την ισορροπία ροπών στον κόμβο 2 για την κατάσταση "0" (Σχ. 3.2) προκύπτει:

$$K_{10} - M_{24,0} = 0 \Rightarrow K_{10} = M_{24,0} = -32 \text{ kNm}$$

Βήμα 5. Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων και υπολογισμός των ξ_i (εδώ: ξ_1)

Η ολική αντίδραση K_1 που εμφανίζεται στη θέση του κόμβου 2, όπου τοποθετήθηκε η δικινητή πάκτωση, δεν υπάρχει στον πραγματικό φορέα και, συνεπώς, οφείλει να μηδενιστεί. Από την συνθήκη αυτή ισορροπίας, προκύπτει η τιμή της άγνωστης στροφής ξ_1 του κόμβου 2:

$$K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10} = 0 \Rightarrow \xi_1 = -(K_{10}/K_{11}) = 2.74 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Διαγράμματα καμπτικών ροπών M

Ο υπολογισμός των εντασιακών μεγεθών του φορέα επιτυγχάνεται με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας. Έτσι, οι τελικές καμπτικές ροπές M_{ij} προκύπτουν από τη σχέση:

$$M_{ij} = M_{ij,0} + M_{ij,1} \cdot \xi_1$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για τους κόμβους 2, 3, 4 παίρνουμε:

$$M_{24} = -6 \cdot (EI/L_{24}) \cdot \psi_{24,0} + 4 \cdot (EI/L_{24}) \cdot \xi_1 = -13.71 \text{ kNm}$$

$$M_{42} = -6 \cdot (EI/L_{24}) \cdot \psi_{24,0} + 2 \cdot (EI/L_{24}) \cdot \xi_1 = -22.86 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 4 \cdot (EI/L_{23}) \cdot \xi_1 = 13.71 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = 2 \cdot (EI/L_{23}) \cdot \xi_1 = 6.86 \text{ kNm}$$

Προκειμένου να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών, απαιτείται μετασχηματισμός των προσήμων με βάση την ίνα αναφοράς. Για τον σκοπό αυτόν αντιστρέφονται τα πρόσημα των ροπών M_{42} και M_{23} (δηλαδή των ροπών του αριστερού άκρου των στοιχείων 4-2 και 2-3), οπότε (Σχ. 3.4):

$$M_{24} = -13.71 \text{ kNm} \quad M_{42} = 22.86 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = -13.71 \text{ kNm} \quad M_{32} = 6.86 \text{ kNm}$$

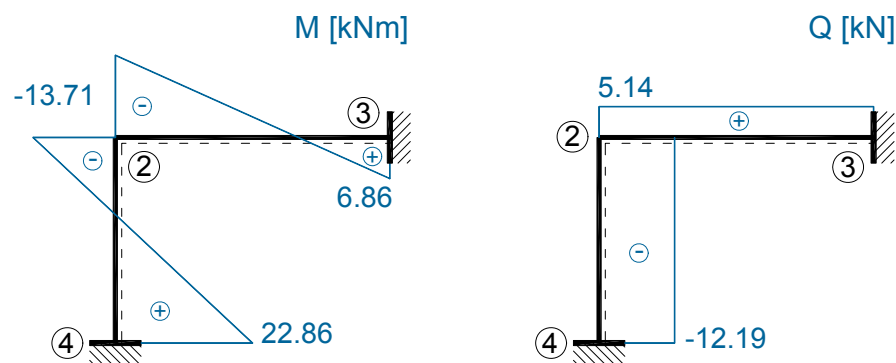
Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων Q

Οι τελικές τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται από τις ήδη υπολογισθείσες τελικές καμπτικές ροπές με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας, οι οποίες εφαρμόζονται για κάθε δοκό ξεχωριστά. Η εφαρμογή της προκύπτουσας γενικής σχέσης (βλ. Άσκηση 1)

$$Q_{ij} = Q_{ij}^0 + \frac{M_j - M_i}{L_{ij}},$$

όπου $Q_{ij}^0 = 0$ ελλείψει εξωτερικών φορτίων, δίνει τις τελικές τέμνουσες δυνάμεις (Σχ. 3.4):

$$Q_{24} = Q_{42} = \frac{M_{24} - M_{42}}{L_{24}} = -12.19 \text{ kN} \quad Q_{23} = Q_{32} = \frac{M_{32} - M_{23}}{L_{23}} = 5.14 \text{ kN}$$



Σχήμα 3.4 Διαγράμματα M και Q λόγω της θερμοκρασιακής μεταβολής $t_{2,3} = +20^\circ C$.

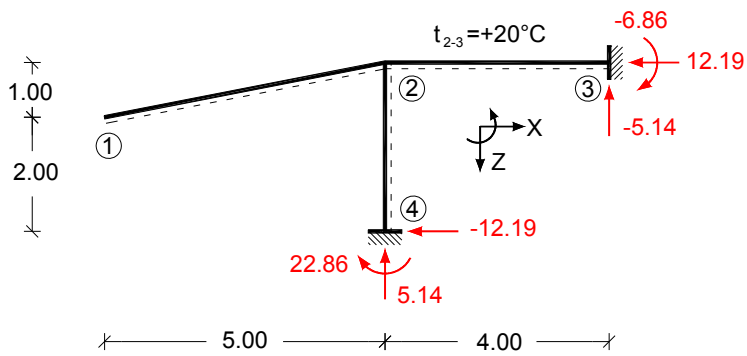
γ. Υπολογισμός της βύθισης v_{z1} του άκρου 1

Ο υπολογισμός της βύθισης v_{z1} του άκρου 1 μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της παρακάτω σχέσης επαλληλίας, η οποία είναι ανάλογη αυτής που χρησιμοποιήθηκε και για τον υπολογισμό των καμπτικών ροπών:

$$v_{z1} = v_{z1,0} + v_{z1,1} \cdot \xi_1 = 0 + 5 \cdot (2.74 \cdot 10^{-4}) = 1.37 \text{ mm}$$

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολούθως διενεργούνται τρεις ισορροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (βλ. Σχ. 3.5).



$$\sum F_x = 12.19 - 12.19 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 5.14 - 5.14 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_4 = -6.86 + 22.86 + (5.14 \cdot 4) - (12.19 \cdot 3) = -0.01 \approx 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 3.5 Ισοροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Οι τρεις παραπάνω συνθήκες ισοροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισοροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 1

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος I: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
- [2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος II: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Κεφάλαιο 2

Κινητοί ατενείς φορείς με ή χωρίς ελαστικές στηρίξεις/πακτώσεις

Σύνοψη

Οι ασκήσεις 4 έως 6 του κεφαλαίου αυτού, αφορούν σε κινητούς ατενείς φορείς. Στην Άσκηση 4 γίνεται η επίλυση μιας δοκού με ενδιάμεση άρθρωση με χρήση μονόπακτων και αμφίπακτων στοιχείων. Επίσης, σχολιάζεται η επίλυση για την περίπτωση ελαστικής στήριξης και ελαστικής πάκτωσης. Στην Άσκηση 5 γίνεται επίλυση ενός απλού δίστου με ανισοϋψείς στύλους, που διαθέτει έναν βαθμό ελευθερίας κίνησης (δηλ. μία άγνωστη μετακίνηση) και, επιπλέον, εξετάζεται η περίπτωση οριζόντιας ελαστικής στήριξης του. Τέλος, στην Άσκηση 6 επιλύεται ένα παρόμοιο πλαίσιο που διαθέτει με δύο βαθμούς ελευθερίας κίνησης (δηλ. δύο άγνωστες μετακινήσεις)

Προαπαιτούμενη γνώση

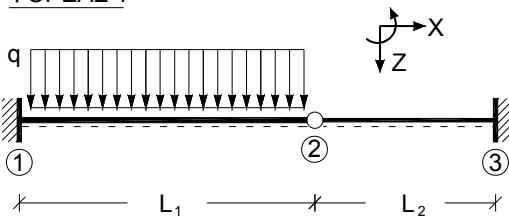
Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων (βλ. π.χ. [2]-κεφ.3) και οπωσδήποτε η μελέτη των ασκήσεων 1, 2 και 3 του κεφαλαίου 1. Σε κάθε περίπτωση, απαιτείται καλή γνώση της Στατικής των ισοστατικών φορέων, καθώς και επαρκής εξοικείωση με τη Μέθοδο των υπεραριθμών δυνάμεων για υπερστατικούς φορείς (βλ. π.χ. [1] και [2]- κεφ.2, καθώς και λοιπή σχετική βιβλιογραφία της παραγράφου Ε7).

Άσκηση 4

Εκφώνηση

- α. Ο φορέας 1 του σχήματος 4.0 να επιλυθεί για τη σημειούμενη φόρτιση με τη ΜΜ και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών και τεμνουσών.
- β. Να εντοπιστούν τα σημεία στα οποία διαφοροποιείται η διαδικασία επίλυσης, αν στον κόμβο 2 του φορέα 1 προστεθεί ένα δρομικό ελατήριο, και στον κόμβο 3 ένα στροφικό ελατήριο (Φορέας 2).

ΦΟΡΕΑΣ 1



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία

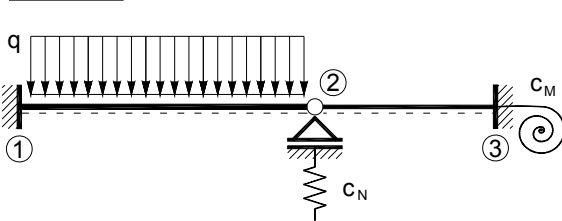
$L_1=5.00m$

$L_2=3.00m$

Φόρτιση

$q=15 \text{ kN/m}$

ΦΟΡΕΑΣ 2



Δοκοί

$EI_{12}=2 \cdot 10^5 \text{ kNm}^2$

$EI_{23}=10^5 \text{ kNm}^2$

$EA \rightarrow GA_s \rightarrow \infty$

Σταθερές ελατηρίων

$c_N=10^3 \text{ kN/m}$

$c_M=10^2 \text{ kNm/rad}$

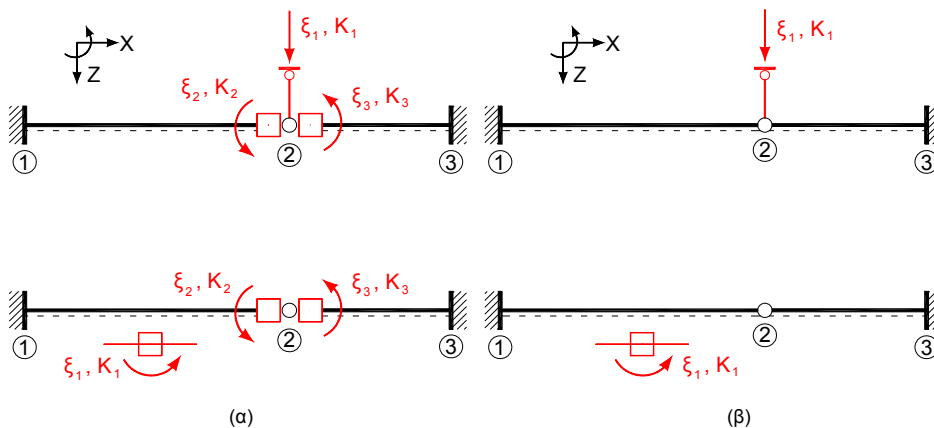
Σχήμα 4.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

α. ΦΟΡΕΑΣ 1

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Στο ΓΚΣ όλοι οι βαθμοί ελευθερίας (ΒΕ) του δεδομένου φορέα πρέπει να είναι δεσμευμένοι (Σημ.: Οι ΒΕ είναι οι δυνατότητες στροφής ή μετατόπισης των κόμβων του φορέα). Για τον φορέα 1 του σχήματος 4.0 ισχύουν τα εξής: Οι κόμβοι 1 και 3 είναι πλήρως πακτωμένοι και επομένως δεν διαθέτουν ΒΕ. Στον κόμβο 2 η στροφή φ_{21} (= στροφή της διατομής του δεξιού άκρου της δοκού 1-2) είναι στη γενική περίπτωση διαφορετική από τη στροφή φ_{23} (= στροφή της διατομής του αριστερού άκρου της δοκού 2-3). Επομένως, και οι δύο αυτές στροφές πρέπει να δεσμευτούν στο ΓΚΣ με προσθήκη στροφικών δεσμικών ράβδων.



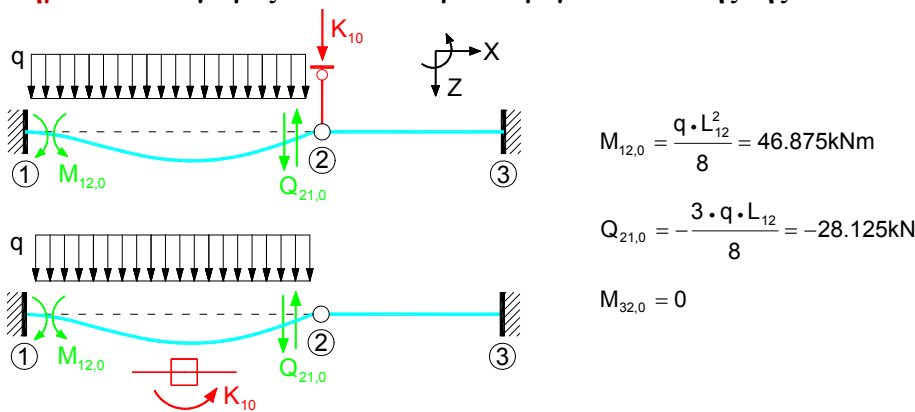
Σχήμα 4.1 ΓΚΣ του φορέα 1: (α) αν είναι διαθέσιμοι πίνακες μόνον για αμφίπακτες δοκούς, (β) αν είναι διαθέσιμοι πίνακες για μονόπακτες και αμφίπακτες δοκούς.

Επίσης, είναι προφανές ότι ο κόμβος 2 δεν μπορεί μεν να μετατοπιστεί οριζοντίως λόγω της παραδοχής της ατένειας των δοκών, μπορεί όμως να μετατοπιστεί κατά την κατακόρυφη έννοια, αφού η στήριξή του δεν είναι ακλόνητη αλλά ελαστική. Επομένως, στο ΓΚΣ πρέπει να δεσμεύσουμε και τον κατακόρυφο ΒΕ του κόμβου 2, δηλαδή την κατακόρυφη μετατόπισή του. Έτσι, συνολικά, το ΓΚΣ προκύπτει με παγίωση του κόμβου 2 με μία κατακόρυφη δεσμική ράβδο και ταυτόχρονα με δικινητή πάκτωση των σημείων αριστερά και δεξιά της άρθρωσης (Σχ. 4.1(α) – άνω). Εναλλακτικά, αντί της κατακόρυφης παγίωσης του κόμβου 2, υπάρχει και η δυνατότητα δικινητής πάκτωσης της χορδής της δοκού 1-2 (Σχ. 4.1(α) – κάτω). Πάντως, είτε με τον πρώτο είτε με τον δεύτερο τρόπο προκύπτει ένα ΓΚΣ με τρία άγνωστα γεωμετρικά μεγέθη.

Ωστόσο, ο αριθμός των αγνώστων μπορεί να μειωθεί από 3 σε 1, εάν γίνει χρήση των διαθέσιμων πινάκων μονόπακτων δοκών για διάφορα φορτιστικά αίτια. Στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται η δέσμευση των στροφών εκατέρωθεν της άρθρωσης, αλλά αρκεί η παγίωση της κατακόρυφης μετατόπισης του κόμβου 2 (Σχ. 4.1(α),(β) - άνω) ή, εναλλακτικά η δικινητή πάκτωση της στροφής της χορδής της δοκού 1-2 (Σχ. 4.1(α),(β) - κάτω). Σημειώνεται, τέλος, ότι αντί της στροφής της χορδής της δοκού 1-2 θα μπορούσε να επιλεγεί ως άγνωστο μέγεθος η στροφή της χορδής της δοκού 2-3.

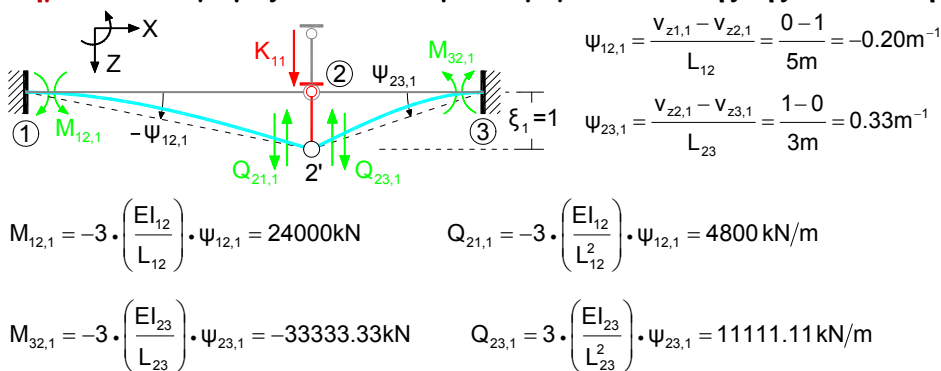
Ακολουθώντας, η διαδικασία επίλυσης θα παρουσιαστεί παράλληλα, τόσο με άγνωστο μέγεθος ξ_1 την κατακόρυφη μετατόπιση του κόμβου 2, όσο και με άγνωστο μέγεθος ξ_1 τη στροφή της χορδής 1-2, έτσι ώστε να καταστούν σαφείς οι διαφορές των δύο αυτών εναλλακτικών διαδρομών επίλυσης.

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"



Σχήμα 4.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0".

Βήμα 3. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης " $\xi_1=1$ "



Σχήμα 4.3α Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " (για $\xi_1=v_{z2}$).

Οι ροπές των μονόπακτων στοιχείων λαμβάνονται από τους Πίνακες 2α και 2β.

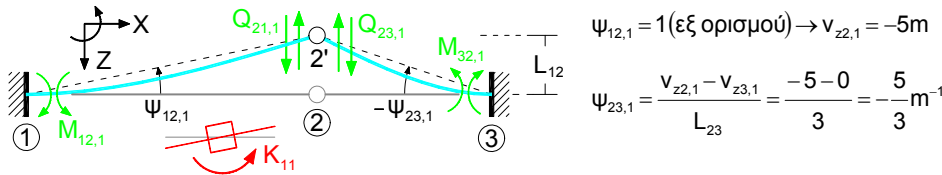
Υπενθύμιση (βλ. [2], παράγρ. 3.1.3):

Τα βελιάκια που συμβολίζουν εντασιακά μεγέθη σχεδιάζονται πάντοτε έτσι, ώστε να δείχνουν τη συμβατικά θετική φορά του μεγέθους που συμβολίζουν (ροπή, δύναμη). Η πραγματική φορά ενός εντασιακού μεγέθους προκύπτει από την απεικονιζόμενη συμβατικά θετική φορά σε συνδυασμό με το πρόσημό του. Διαφορετική σύμβαση σχεδίασης ισχύει για τα βελιάκια που συμβολίζουν μετακινήσεις: Αυτά σχεδιάζονται κατά κανόνα έτσι, ώστε να δείχνουν την πραγματική φορά του μεγέθους που συμβολίζουν (μετατόπιση, στροφή). Κατά συνέπεια, αν η πραγματική φορά τους είναι αντίθετη

προς τη συμβατικά θετική φορά (π.χ. στο παράδειγμά μας η στροφή $\psi_{12,1}$, βλ. Σχ. 4.3(α)), τότε δίπλα στο βελάκι γράφεται το σύμβολο του μεγέθους με μείον.

Παρατήρηση σχετικά με τις μονάδες μέτρησης ροπών στη μοναδιαία κατάσταση $\xi_1=v_{z2}=1$:

Στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " επιβάλλεται στον κόμβο 2 μία μοναδιαία μετατόπιση $v_{z2}=1$, η οποία θεωρείται *αδιάστατη*. Κατά συνέπεια, οι ροπές προκύπτουν σε μονάδες $[kNm/m]=[kN]$ και οι τέμνουσες σε μονάδες $[kN/m]$.



$$\psi_{12,1} = 1 \text{ (εξ ορισμού)} \rightarrow v_{z2,1} = -5m$$

$$\psi_{23,1} = \frac{v_{z2,1} - v_{z3,1}}{L_{23}} = \frac{-5 - 0}{3} = -\frac{5}{3} m^{-1}$$

$$M_{12,1} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{12,1} = -120000 kNm \quad Q_{21,1} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}^2} \right) \cdot \psi_{12,1} = -24000 kN$$

$$M_{32,1} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \psi_{23,1} = 166666.67 kNm \quad Q_{23,1} = 3 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}^2} \right) \cdot \psi_{23,1} = -55555.56 kN$$

Σχήμα 4.3β Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " (για $\xi_1=\psi_{12}$).

Παρατήρηση σχετικά με τις μονάδες μέτρησης ροπών στη μοναδιαία κατάσταση " $\xi_1=\psi_{12}=1$ ":

Εφόσον η επιβαλλόμενη μοναδιαία στροφή χορδής $\xi_1=1$ είναι αδιάστατη (Σημ.: Κανονικά οι στροφές μετρούνται σε $[rad]$), οι μονάδες μέτρησης των αναπτυσσόμενων στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " ροπών $M_{ik,1}$ είναι όχι $[kNm]$, αλλά $[kNm/rad]$. Εντούτοις, κατά κανόνα παραλείπεται το $'/rad'$ και οι ροπές δίνονται σε $[kNm]$. Βλ. και σχετική παρατήρηση στο βήμα 3 της Ασκήσης 1.

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης (εδώ: K_{11} και K_{10})

Ο συντελεστής στιβαρότητας K_{11} και ο φορτιστικός όρος K_{10} δεν είναι παρά οι αντιδράσεις της παγίωσης του κόμβου 2 (ή της δικινητής πάκτωσης της χορδής της δοκού 1-2) στις καταστάσεις " $\xi_1=1$ " και "0" αντίστοιχα. Οι αντιδράσεις αυτές μπορούν να υπολογιστούν, είτε με κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας, είτε με τη βοήθεια της αρχής των δυνατών έργων (ΑΔΕ). Εδώ επιλέγεται η εφαρμογή της ΑΔΕ, σύμφωνα με την οποία το έργο που παράγεται από ένα σύνολο ισορροπουσών δυνάμεων ενός φορέα (εσωτερικών και εξωτερικών) κατά μία δυνατή (νοητή) μετακίνηση, είναι μηδενικό: $W_e^v + W_i^v = 0$ (βλ. Εισαγωγή, παράγρ. Ε5). Κατά την εφαρμογή της ΑΔΕ είναι επιτρεπτή, προς απλοποίηση των απαιτούμενων υπολογισμών, η μετατροπή του ΓΚΣ σε μία κινηματική αλυσίδα με τέτοιο τρόπο, ώστε αφενός να μηδενίζεται το έργο των εσωτερικών δυνάμεων ($W_i^v=0$) κατά τη δυνατή μετακίνηση και αφετέρου να παράγει δυνατό έργο μόνο το ζητούμενο κάθε φορά μέγεθος K_{ij} ή K_{i0} . Με τον τρόπο αυτόν το ζητούμενο K_{ij} ή K_{i0} προκύπτει από μία μόνον εξίσωση, η οποία περιέχει μόνο εξωτερικά έργα και μόνο ένα άγνωστο μέγεθος (το K_{ij} ή K_{i0}). (Σημ.: Οι χαρακτηρισμοί «δυνατή» και «νοητή» χρησιμοποιούνται ως ταυτόσημοι). Έτσι, στην περίπτωση μας, για τον υπολογισμό του K_{11} γίνονται τα ακόλουθα βήματα (για $\xi_1=v_{z2}$ βλ. Σχ. 4.4(α)-άνω, για $\xi_1=\psi_{12}$, βλ. Σχ. 4.4(α)-κάτω) :

- (1) Καταλύεται η πρόσθετη δεσμική ράβδος που αντιστοιχεί στο άγνωστο μέγεθος ξ_1 και ταυτόχρονα εισάγονται στους κόμβους 1 και 3 αρθρώσεις (δηλαδή καταλύονται οι εσωτερικοί συνδεσμοί που μεταφέρουν την καμπτική ροπή). Έτσι, το ΓΚΣ μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα.
- (2) Προκειμένου να διατηρηθεί στον κινηματικό πλέον φορέα η εντασιακή κατάσταση " $\xi_1=1$ ", στην οποία αναπτύσσεται το ζητούμενο μέγεθος K_{11} , προσάγουμε στις όχθες των συνδέσμων που καταλύσαμε τα προϋπάρχοντα σε αυτούς εντασιακά μεγέθη της κατάστασης " $\xi_1=1$ " ως εξωτερικά μεγέθη έντασης (φορτία). Προσάγουμε, δηλαδή, στις αρθρώσεις 1 και 3 τις ροπές $M_{12,1}$ και $M_{32,1}$ αντίστοιχα, και στη θέση της πρόσθετης δεσμικής ράβδου που καταλύσαμε το εντασιακό μέγεθος παγίωσης /πάκτωσης K_{11} . Ο κινηματικός μας φορέας έχει έτσι ακριβώς την ίδια ένταση όπως και το παραμορφωμένο ΓΚΣ της κατάστασης " $\xi_1=1$ " και, επομένως, ισορροπεί.
- (3) Στον ισορροπούντα αυτόν κινηματικό φορέα προσδίδουμε τώρα μία νοητή (δυνατή) μετακίνηση " $\xi_1=1$ " (για $\xi_1=v_{z2}$ βλ. Σχ. 4.4(α)-άνω, για $\xi_1=\psi_{12}$ βλ. Σχ. 4.4(α)-κάτω), κατά την οποία μετατοπίζονται οι κόμβοι του χωρίς, όμως, ο φορέας να υφίσταται (καμπτικές) παραμορφώσεις (αφού είναι μηχανισμός). Εφόσον δεν υπάρχουν παραμορφώσεις, είναι προφανές ότι δεν αναπτύσσονται εσωτερικές εντάσεις και, επομένως, τα δυνατά (νοητά) έργα που παράγονται κατά τη δυνατή αυτή μετακίνηση, είναι αποκλειστικώς έργα εξωτερικών εντασιακών μεγεθών. Σημειώνεται ότι η γεωμετρία (δηλ. οι τελικές θέσεις των κόμβων) της

νοητής μετακίνησης " $\xi_1=1$ " είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη της ('πραγματικής') μοναδιαίας μετακίνησης " $\xi_1=1$ ".

(4) Καταγράφουμε όλα τα (εξωτερικά) δυνατά έργα W_e^v , τα αθροίζουμε και τα εξισώνουμε με το μηδέν. Η προκύπτουσα εξίσωση περιέχει ως μοναδικό άγνωστο μέγεθος τον ζητούμενο συντελεστή K_{11} .

$$\psi_{12,1}^v = -(1/5) = -0.20\text{m}^{-1}$$

$$\psi_{23,1}^v = (1/3) = 0.333\text{m}^{-1}$$

$$W_e^v = K_{11} \cdot 1^v + M_{12,1} \cdot \psi_{12,1}^v + M_{32,1} \cdot \psi_{23,1}^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{11} + 24000 \cdot (-0.2) - 33333.33 \cdot 0.33 = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} = 15911.1\text{kN/m}$$

$$\psi_{12,1}^v = 1\text{m}^{-1} \quad \psi_{23,1}^v = -(5/3) = -1.667\text{m}^{-1}$$

$$W_e^v = K_{11} \cdot 1^v + M_{12,1} \cdot \psi_{12,1}^v + M_{32,1} \cdot \psi_{23,1}^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{11} - 120000 \cdot 1 + 1666666.7 \cdot (-1.667) = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} = 397778.34\text{kNm}$$

Σχήμα 4.4α Κατάσταση " $\xi_1=1$ " με ένταση από την κατάσταση " $\xi_1=1$ " για τον υπολογισμό με την ΑΔΕ του συντελεστή στιβαρότητας K_{11} , θεωρούμενου είτε ως αντίδραση παγίωσης του κόμβου 2 είτε ως αντίδραση της δικινητής πάκτωσης της χορδής της δοκού 1-2.

Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται και για τον υπολογισμό του K_{10} . Η κατάσταση δυνατής μετακίνησης " $\xi_1=1$ " είναι ακριβώς ίδια, όπως και για τον υπολογισμό του K_{11} . Η (ισορροπούσα) εντασιακή κατάσταση που παράγει δυνατό έργο, είναι όμως τώρα η κατάσταση "0" (για $\xi_1=v_{22}$ βλ. Σχ. 4.4(β)-άνω, για $\xi_1=v_{12}$ βλ. Σχ. 4.4(β)-κάτω). Η καταγραφή όλων των (εξωτερικών) δυνατών έργων W_e^v , που παράγει η («πραγματική») εντασιακή κατάσταση "0" στη νοητή μετακίνηση " $\xi_1=1$ " και η εξίσωσή του αθροίσματός τους με το μηδέν, δίνει τον ζητούμενο φορτιστικό όρο K_{10} .

$$W_e^v = K_{10} \cdot 1^v + M_{12,0} \cdot \psi_{12,1}^v + \frac{qL_{12}}{2} \cdot v_{22}^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} + 46.875 \cdot (-0.2) + \left(\frac{15.5}{2}\right) \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} = -28.125\text{kN}$$

$$W_e^v = K_{10} \cdot 1^v + M_{12,0} \cdot \psi_{12,1}^v + \frac{qL_{12}}{2} \cdot v_{22}^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} + 46.875 \cdot 1 + \left(\frac{15.5}{2}\right) \cdot (-5) = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} = 140.625\text{kNm}$$

Σημ.: Για την αντικατάσταση του συνεχούς φορτίου q με τα δυο μοναχικά $qL_{12}/2$ βλ. [2], Σχ. 3.3-27.

Σχήμα 4.4β Κατάσταση " $\xi_1=1$ " με ένταση από την κατάσταση "0" για τον υπολογισμό με την ΑΔΕ του φορτιστικού όρου K_{10} θεωρούμενου, είτε ως αντίδραση παγίωσης του κόμβου 2 είτε ως αντίδραση της δικινητής πάκτωσης της χορδής της δοκού 1-2.

Βήμα 5. Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων και υπολογισμός των ξ_i (εδώ: ξ_1)

Η συνολική αντίδραση K_1 , είτε θεωρηθεί ως αντίδραση παγίωσης του κόμβου 2 είτε ως αντίδραση της δικινητής πάκτωσης της χορδής της δοκού 1-2, δίνεται από τη σχέση επαλληλίας $K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10}$ και οφείλει να είναι στον πραγματικό φορέα ίση με το μηδέν, δεδομένου ότι στον πραγματικό φορέα δεν υφίσταται καμία

τέτοια παγίωση: $K_1=0$. Στο σημείο αυτό, χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή όσον αφορά στη φυσική ερμηνεία και στις μονάδες μέτρησης του άγνωστου γεωμετρικού μεγέθους ξ_1 . Έτσι:

$$\xi_1^{(a)} = -(K_{10}/K_{11}) = -(-28.125/15911.11) = 1.768 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

$$\xi_1^{(b)} = -(K_{10}/K_{11}) = -(-140.625/397778.34) = -3.535 \cdot 10^{-3} \text{rad}$$

Μεταξύ της κατακόρυφης μετατόπισης $\xi_1^{(a)}$ του κόμβου 2 και της στροφής $\xi_1^{(b)}$ της χορδής της δοκού 1-2, πρέπει να υφίσταται η σχέση συμβιβαστού:

$$|\xi_1^{(a)}| = -|\xi_1^{(b)}| \cdot L_{12}$$

Πράγματι, η σχέση αυτή επαληθεύεται από τα παραπάνω αριθμητικά αποτελέσματα:

$$|-\xi_1^{(b)}| \cdot L_{12} = -(-3.535 \cdot 10^{-4} \text{rad}) \cdot 5.0 \text{m} = 1.768 \cdot 10^{-3} \text{m} = |\xi_1^{(a)}|$$

Θα πρέπει, τέλος, να σημειωθεί ότι οι αντιδράσεις παγίωσης/πάκτωσης K_{11} και K_{10} θα μπορούσαν να υπολογιστούν και από τις εξισώσεις ισορροπίας των κατακορύφων δυνάμεων που δρουν στον κόμβο 2. Για τον υπολογισμό αυτόν είναι απαραίτητη η χρήση των τεμνουσών δυνάμεων που αναπτύσσονται στον φορέα στις καταστάσεις "0" και " $\xi_1=1$ ". Έτσι, π.χ. για την περίπτωση που επιλέγουμε ως άγνωστο μέγεθος τη μετατόπιση του κόμβου 2 (δηλαδή $\xi_1=v_{22}$), προκύπτουν με τα δεδομένα των σχημάτων 4.2 και 4.3α τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα όπως και με την εφαρμογή της ΑΔΕ:

$$K_{10} - Q_{21,0} = 0 \Rightarrow K_{10} = Q_{21,0} = -28.125 \text{kN/m}$$

$$K_{11} - Q_{21,1} - Q_{23,1} = 0 \Rightarrow K_{11} = Q_{21,1} + Q_{23,1} = 15911.11 \text{kN /m}$$

$$\xi_1 = -(K_{10}/K_{11}) = 1.768 \cdot 10^{-3} \text{m}$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών του φορέα επιτυγχάνεται με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας:

$$M_{ij} = M_{ij,0} + M_{ij,1} \cdot \xi_1$$

Η εφαρμογή της παραπάνω σχέσης για τους κόμβους 1 και 3 δίνει τις παρακάτω τιμές:

$$M_{12} = M_{12,0} + \xi_1 \cdot M_{12,1} = 46.875 + (1.768 \cdot 10^{-3}) \cdot 240000 = 89.3 \text{kNm}$$

$$M_{32} = M_{32,0} + \xi_1 \cdot M_{32,1} = 0 + (1.768 \cdot 10^{-3}) \cdot (-33333.333) = -58.92 \text{kNm}$$

Με πρόσημα βάσει της σύμβασης της ίνας αναφοράς:

$$M_{12} = -89.3 \text{kNm} \quad M_{32} = -58.92 \text{kNm}$$

Οι τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται κατά τα γνωστά (βλ. Άσκηση 1) από τις καμπτικές ροπές ως εξής (Οι ροπές στις παρακάτω σχέσεις εισάγονται με τα πρόσημα της σύμβασης της ίνας αναφοράς):

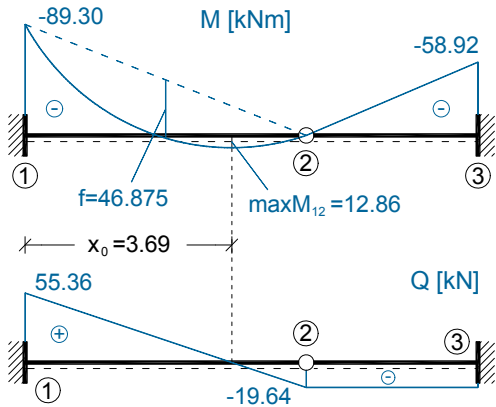
$$Q_{12} = \left(\frac{q \cdot L_{12}}{2} \right) + \left(\frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} \right) = \frac{15 \cdot 5}{2} + \frac{0 - (-89.3)}{5} = 55.36 \text{kN}$$

$$Q_{21} = - \left(\frac{q \cdot L_{12}}{2} \right) + \left(\frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} \right) = - \frac{15 \cdot 5}{2} + \frac{0 - (-89.3)}{5} = -19.64 \text{kN}$$

$$Q_{23} = Q_{32} = 0 + \left(\frac{M_{32} - M_{23}}{L_{23}} \right) = \frac{(-58.92) - 0}{3} = -19.64 \text{kN}$$

Βέβαια, οι τέμνουσες μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητα από τις ροπές με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας. Έτσι, με τα δεδομένα των σχημάτων 4.2 και 4.3(α) παίρνουμε, π.χ. για την Q_{21} την ίδια τιμή που βρήκαμε πιο πάνω, κάνοντας χρήση των ροπών:

$$Q_{21} = Q_{21,0} + \xi_1 \cdot Q_{21,1} = -28.125 + (1.768 \cdot 10^{-3}) \cdot 4800 = -19.64 \text{ kN}$$



$$f = \frac{q \cdot L_{12}^2}{8} = \frac{15 \cdot 5^2}{8} = 46.875$$

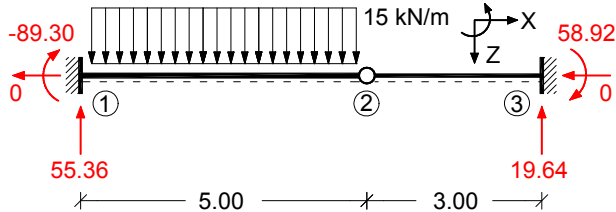
$$x_0 = \frac{Q_{12}}{q} = \frac{55.36}{15} = 3.69 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \max M_{12} &= M_{12} + Q_{12} \cdot x_0 - \frac{q \cdot x_0^2}{2} \\ &= -89.3 + 55.36 \cdot 3.69 - \frac{15 \cdot 3.69^2}{2} \\ &= 12.86 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Σχήμα 4.5 Διαγράμματα M και Q .

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολούθως, διενεργούνται τρεις ισοροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (Σχ. 4.8).



$$\sum F_x = 0 + 0 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 55.36 + 19.64 - (15 \cdot 5) = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -89.30 + 58.92 - (19.64 \cdot 8) + \left(15 \cdot \frac{5^2}{2}\right) = 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 4.6 Ισοροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

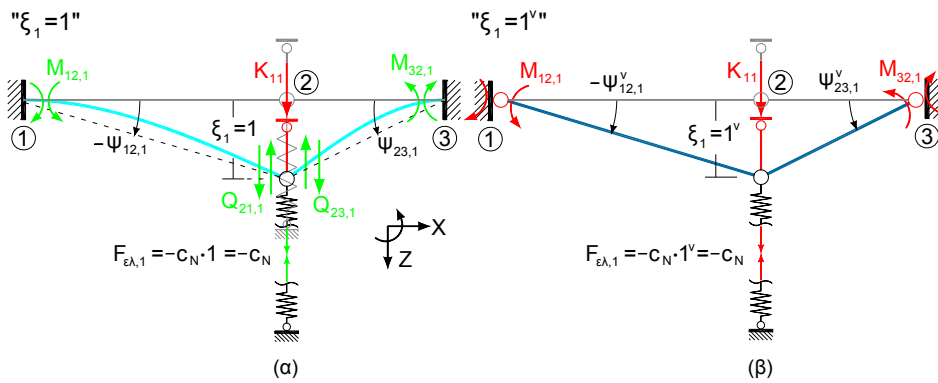
Οι τρεις παραπάνω συνθήκες ισοροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισοροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.

β. ΦΟΡΕΑΣ 2

Σε ποιά σημεία διαφοροποιείται η παραπάνω διαδικασία επίλυσης, αν στον κόμβο 2 του φορέα 1 προστεθεί ένα δρομικό ελατήριο και στον κόμβο 3 ένα στροφικό ελατήριο (βλ. φορέα 2 του σχήματος 4.0);

- Προσθήκη ελαστικής στήριξης στον κόμβο 2

Η προσθήκη ενός κατακόρυφου δρομικού ελατηρίου στον κόμβο 2 δεν μηδενίζει τη δυνατότητα κατακόρυφης μετατόπισης του. Επομένως, δεν προστίθενται ούτε αφαιρούνται βαθμοί ελευθερίας έναντι του φορέα 1. Έτσι, το ΓΚΣ έχει τις ίδιες δεσμεύσεις με το ΓΚΣ του φορέα 1 και ο φορτιστικός όρος K_{10} παραμένει ίδιος, καθώς το δρομικό ελατήριο παραμένει ανενεργό κατά την επιβολή της δεδομένης εξωτερικής φόρτισης (ομοιόμορφο φορτίο στη δοκό 1-2) στο ΓΚΣ. Η μόνη διαφοροποίηση που δημιουργείται εντοπίζεται στην τιμή του συντελεστή στιβαρότητας K_{11} . Αν ως άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος θεωρηθεί η κατακόρυφη μετατόπιση του κόμβου 2 και, αν παραστήσουμε την ελαστική στήριξη ως μία ελαστική δεσμική ράβδο, τότε στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " αναπτύσσεται μέσα στην ελαστική αυτή δεσμική ράβδο η θλιπτική δύναμη $F_{ελ,1} = -c_N$ (Σχ. 4.6(α)).



Σχήμα 4.7 Κατάσταση " $\xi_1=1$ " με ένταση από την κατάσταση " $\xi_1=1$ " για τον υπολογισμό με την ΑΔΕ του συντελεστή στιβαρότητας K_{11} στον φορέα 2.

Μετατρέποντας το ΓΚΣ σε μηχανισμό (βλ. Σχ. 4.7(β)), δίνοντάς του μία νοητή μετακίνηση $\xi_1=1^v$ και θέτοντας τα παραγόμενα από την 'πραγματική' εντασιακή κατάσταση " $\xi_1=1$ " εξωτερικά δυνατά έργα ίσα με το μηδέν παίρνουμε:

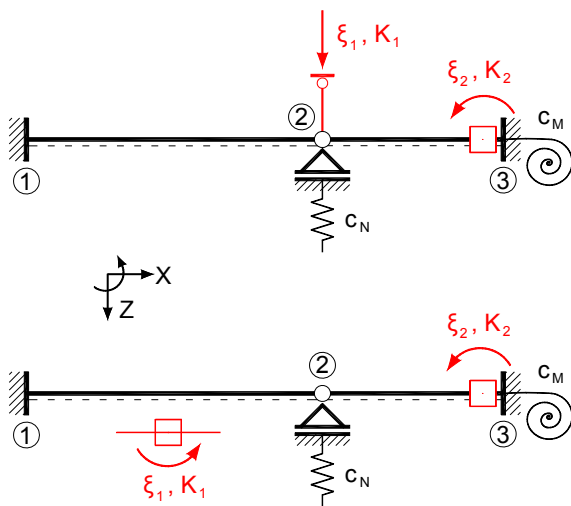
$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{11} \cdot 1^v + M_{12,1} \cdot \psi_{12,1}^v + M_{32,1} \cdot \psi_{32,1}^v + F_{EA} \cdot 1^v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{11} = -M_{12,1} \cdot \psi_{12,1}^v - M_{32,1} \cdot \psi_{32,1}^v - F_{EA} = 0 \Rightarrow K_{11} = 15911.1 + 1000 = 16911.1 \text{ kN}$$

Βλέπουμε επομένως ότι η προσθήκη του ελατηρίου αυξάνει την τιμή του συντελεστή στιβαρότητας K_{11} . Αντίθετα, η τιμή του φορτιστικού όρου K_{10} δεν επηρεάζεται από την προσθήκη δρομικού ελατηρίου στον κόμβο 2, καθώς αυτό παραμένει ανενεργό κατά την επιβολή της συγκεκριμένης εξωτερικής φόρτισης (ομοιόμορφο φορτίο στη δοκό 1-2) στο ΓΚΣ.

- Ελαστική πάκτωση στον κόμβο 3

Η επιπλέον προσθήκη ενός στροφικού ελατηρίου στον κόμβο 3 σημαίνει ότι ο κόμβος 3 δεν είναι πλέον πλήρως πακτωμένος και μπορεί να υποστεί στροφή υπό την επίρεια φορτίσεων. Επομένως, ο φορέας 2 έχει έναν επιπλέον βαθμό ελευθερίας έναντι του φορέα 1, έχει, δηλαδή, ένα επιπλέον άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος: τη στροφή ϕ_3 . Το ΓΚΣ του φορέα 2 δίνεται στο παρακάτω σχήμα:

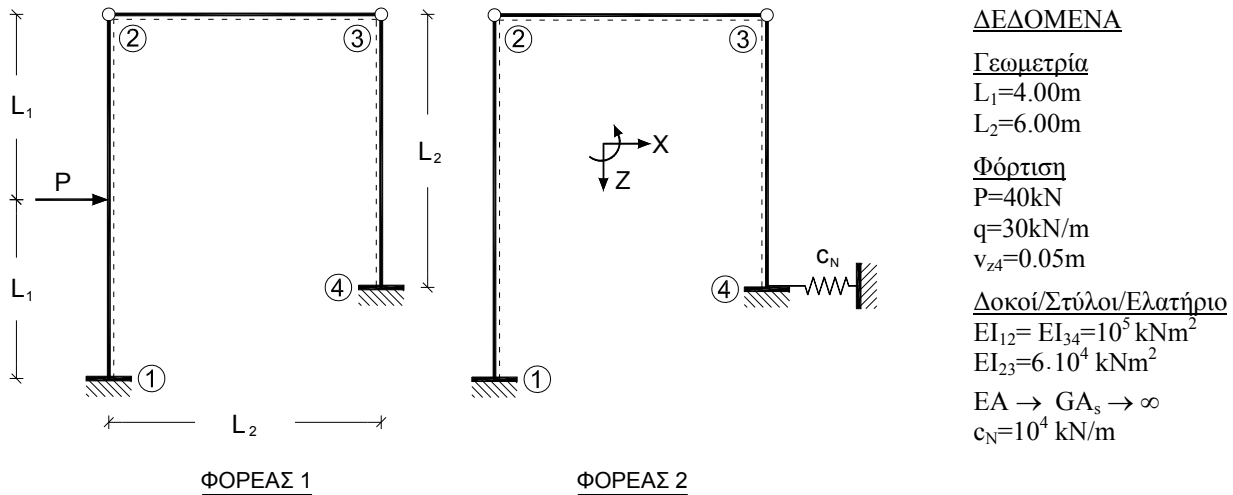


Σχήμα 4.8 Οι δυο διαφορετικές εκδοχές για το ΓΚΣ του φορέα 2.

Άσκηση 5

Εκφώνηση

- α. Ο φορέας 1 του σχήματος 5.0 να επιλυθεί με τη ΜΜ και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα M, Q, N.
 β. Πώς επηρεάζει την ένταση του φορέα (i) η φόρτιση του στοιχείου 2-3 με συνεχές ομοιόμορφο φορτίο q και (ii) η καταναγκασμένη βύθιση v_{z4} της στήριξης 4;
- Για τον φορέα 2, ο οποίος στον κόμβο 4 εδράζεται ελαστικά κατά την οριζόντια διεύθυνση, να επισημανθούν τα σημεία στα οποία εμφανίζονται διαφοροποιήσεις στη διαδικασία επίλυσης έναντι της αντίστοιχης διαδικασίας για τον προηγούμενο φορέα και να υπολογιστούν τα άγνωστα γεωμετρικά μεγέθη.



Σχήμα 5.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

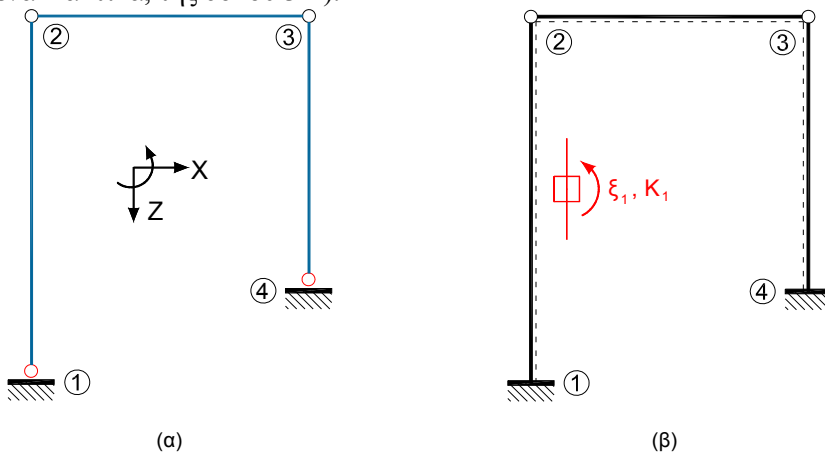
Λύση

1. Φορέας 1

1α. Επίλυση και διαγράμματα M, Q, N

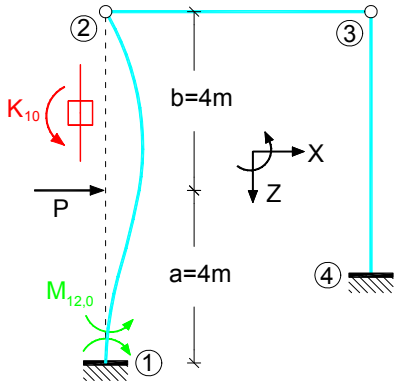
Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Ο σχηματισμός ράβδων του (ατενούς) φορέα 1 είναι μία μονοβάθμια κινηματική αλυσίδα (Σχ. 5.1(α)) και συνεπώς ο φορέας είναι μία φορά κινητός. Με δεδομένη τη δυνατότητα χρήσης πινάκων για μονόπακτες δοκούς, δεν απαιτείται η δέσμευση των στροφών εκατέρωθεν του κόμβου 2 και του κόμβου 3. Έτσι, το ΓΚΣ του φορέα 1 (Σχ. 5.1(β)) προκύπτει, απλώς, με την παγίωση της στροφής της χορδής της δοκού 1-2 (ή, εναλλακτικά, της δοκού 3-4).



Σχήμα 5.1 (α) Ο σχηματισμός ράβδων του φορέα, (β) Το ΓΚΣ.

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"

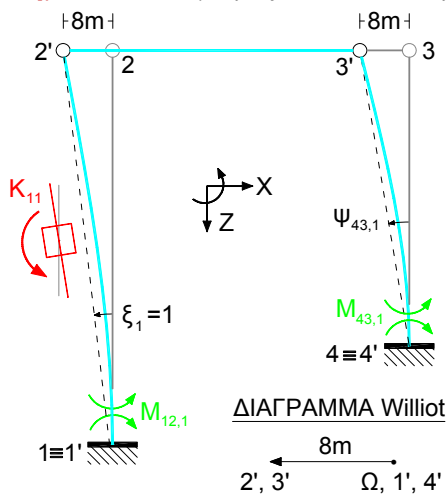


$$M_{12,0} = \frac{P \cdot b}{2} \cdot \left(1 - \frac{b^2}{L_{12}^2} \right) = \frac{40 \cdot 4}{2} \cdot \left(1 - \frac{4^2}{8^2} \right) = 60.0 \text{ kNm}$$

$$M_{43,0} = 0$$

Σχήμα 5.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0".

Βήμα 3. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "ξ₁=1"



$$\psi_{12,1} = \xi_1 = 1$$

$$\psi_{34,1} = \frac{v_{x4} - v_{x3}}{L_{34}} = \frac{0 - (-8)}{6} = \frac{4}{3}$$

$$M_{12,1} = -3 \cdot \left(\frac{E I_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{12,1} = -3 \cdot \left(\frac{10^5}{8} \right) \cdot 1 = -37500 \text{ kNm}$$

$$M_{43,1} = -3 \cdot \left(\frac{E I_{34}}{L_{34}} \right) \cdot \psi_{34,1} = -3 \cdot \left(\frac{10^5}{6} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \right) = -66666.67 \text{ kNm}$$

Σχήμα 5.3 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "ξ₁=1".

Οι ροπές κάμψης στα άκρα των μονόπακτων στοιχείων του ΓΚΣ, υπολογίζονται βάσει των τύπων των Πινάκων 2α και 2β.

Παρατήρηση-Υπενθύμιση:

Στη Γραμμική Στατική οι μετακινήσεις (μετατοπίσεις και στροφές) θεωρούνται πολύ μικρές (απειροστές) και ισχύουν οι γνωστές γεωμετρικές σχέσεις $\cos\varphi \approx 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$, $\tan\varphi \approx \varphi$ κτλ. Έτσι, η απόλυτη τιμή της οριζόντιας μετατόπισης του κόμβου 2, λόγω της μοναδιαίας στροφής $\xi_1 = \psi_{12,1} = 1$, είναι $I_{v_{x2}} I = L_{12} \cdot \psi_{12,1} = 8 \text{ m} \cdot 1$. Για τη μοναδιαία αυτή στροφή δεν καθορίζονται μονάδες μέτρησης: Το 1 μπορεί να είναι 1rad, μπορεί, όμως, να θεωρηθεί ότι είναι και 1mrad. Επομένως, η v_{x2} σημειώνεται μεν στο σχήμα 5.3 ως ίση με 8m (πράγμα που ξενίζει κατ' αρχάς, λόγω του ότι η μετατόπιση των 8 μέτρων δεν είναι, ασφαλώς, μικρή), είναι, όμως, επί το ακριβέστερον ίση με $8 \text{ m} \cdot 1$, όπου το 1 το θεωρούμε πολύ μικρό (απειροστό). Άρα και η μετατόπιση v_{x2} είναι αντίστοιχα μικρή (απειροστή) και ισχύουν οι προαναφερθείσες γεωμετρικές σχέσεις.

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης (εδώ: K_{11} και K_{10})

Για τον υπολογισμό του συντελεστή στιβαρότητας K_{11} (και ακολούθως και του φορτιστικού όρου K_{10}) επιλέγεται η εφαρμογή της αρχής των δυνατών (νοητών) έργων (ΑΔΕ). Για το σκοπό αυτό μετατρέπεται το ΓΚΣ σε μία κινηματική αλυσίδα με τέτοιο τρόπο, ώστε (α) κατά τη θεωρούμενη δυνατή μετακίνηση μόνον ο ζητούμενος κάθε φορά συντελεστής K_{ij} (και όχι και άλλοι συντελεστές) να παράγει δυνατό έργο (επομένως η δυνατή μετακίνηση πρέπει να είναι η "ξ_i=1") και (β) η θεωρούμενη αυτή δυνατή μετακίνηση να μην προκαλεί παραμόρφωση στις δοκούς και, άρα, το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων να είναι ίσο με το μηδέν ($W_i^v = 0$). Ο λόγος, που δεν επιθυμούμε να παράγονται εσωτερικά έργα κατά τη δυνατή μετακίνηση,

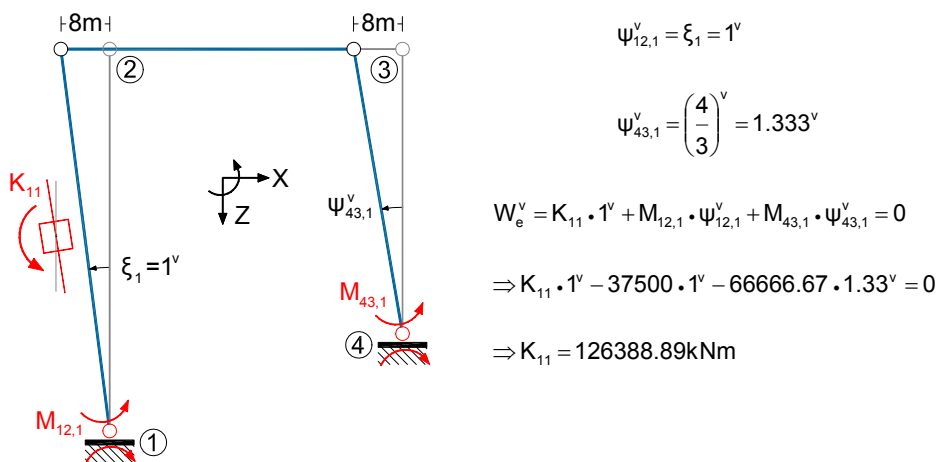
είναι ότι ο υπολογισμός των έργων των εσωτερικών δυνάμεων θα απαιτούσε ολοκληρώσεις του γινομένου [(ροπή)×(καμπυλότητα)] σε όλον τον φορέα, πράγμα που θέλουμε να αποφύγουμε. Έτσι, για τον υπολογισμό του K_{11} γίνονται οι εξής ενέργειες (Σχ. 5.4):

(1) Εισάγουμε αρθρώσεις στους κόμβους 1 και 4, και ταυτόχρονα καταλύουμε την πρόσθετη δεσμική ράβδο που αντιστοιχεί στη δικινητή πάκτωση της χορδής της δοκού 1-2. Έτσι, το ΓΚΣ μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα.

(2) Προκειμένου να διατηρηθεί στον κινηματικό αυτόν φορέα η εντασιακή κατάσταση " $\xi_1=1$ " στην οποία αναπτύσσεται το ζητούμενο μέγεθος K_{11} , προσάγουμε στις αρθρώσεις που εισάγαμε τις προϋπάρχουσες εκεί ροπές $M_{12,1}$ και $M_{43,1}$ της κατάστασης " $\xi_1=1$ " ως εξωτερικά μεγέθη έντασης (φορτία). Επίσης, προσάγουμε στη θέση της πρόσθετης δεσμικής ράβδου που καταλύσαμε το εντασιακό μέγεθος παγίωσης/πάκτωσης K_{11} . Ο κινηματικός μας φορέας έχει έτσι ακριβώς την ίδια ένταση, όπως και το παραμορφωμένο ΓΚΣ της κατάστασης " $\xi_1=1$ " και, επομένως, ισορροπεί.

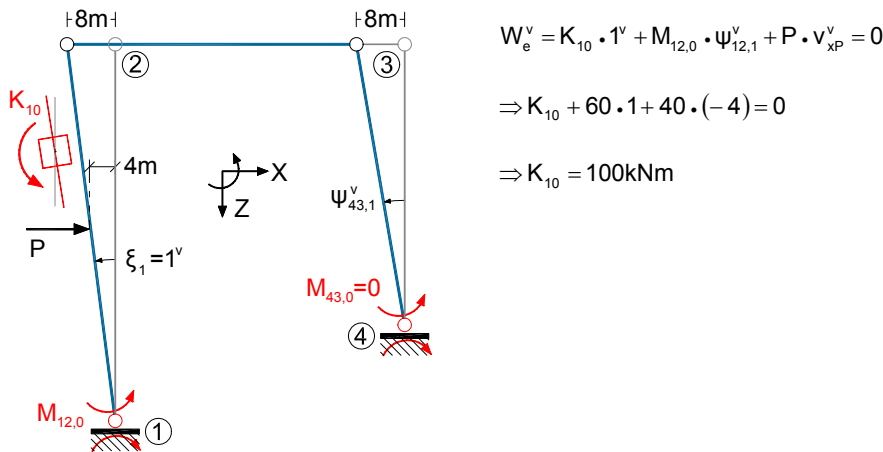
(3) Στον ισορροπούμενο αυτόν κινηματικό φορέα προσδίδουμε τώρα μία νοητή (δυνατή) μετακίνηση $\xi_1=1^v$ (βλ. Σχ. 5.4), κατά την οποία μετατοπίζονται οι κόμβοι του, χωρίς, όμως, ο φορέας να υφίσταται παραμορφώσεις (αφού είναι μηχανισμός). Εφόσον δεν υπάρχουν παραμορφώσεις, είναι προφανές ότι δεν αναπτύσσονται εσωτερικές εντάσεις και, επομένως, τα δυνατά έργα που παράγονται κατά τη δυνατή αυτή μετακίνηση είναι αποκλειστικώς έργα εξωτερικών εντασιακών μεγεθών. Σημειώνεται ότι η γεωμετρία (δηλαδή οι τελικές θέσεις των κόμβων) της νοητής μετακίνησης $\xi_1=1^v$ είναι ακριβώς η ίδια με εκείνη της («πραγματικής») μοναδιαίας μετακίνησης " $\xi_1=1$ ".

(4) Καταγράφουμε όλα τα (εξωτερικά) δυνατά έργα W_e^v , τα αθροίζουμε και τα εξισώνουμε με το μηδέν. Η προκύπτουσα εξίσωση περιέχει ως μοναδικό άγνωστο μέγεθος τον ζητούμενο συντελεστή στιβαρότητας K_{11} .



Σχήμα 5.4 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση " $\xi_1=1$ " για τον υπολογισμό με την ΑΔΕ του συντελεστή στιβαρότητας K_{11} .

Αντίστοιχη διαδικασία ακολουθείται και για τον υπολογισμό του K_{10} . Η κατάσταση δυνατής μετακίνησης " $\xi_1=1^v$ " είναι ακριβώς ίδια, όπως και για τον υπολογισμό του K_{11} . Η (ισορροπούμενη) εντασιακή κατάσταση που παράγει δυνατό έργο είναι, όμως, τώρα η κατάσταση "0" (βλ. Σχ. 5.5). Η καταγραφή όλων των (εξωτερικών) δυνατών έργων W_e^v , που παράγει η («πραγματική») εντασιακή κατάσταση "0" στη νοητή μετακίνηση $\xi_1=1^v$ και η εξίσωση του αθροίσματός τους με το μηδέν δίνει τον ζητούμενο φορτιστικό όρο K_{10} .



$$W_e^v = K_{10} \cdot 1^v + M_{12,0} \cdot \psi_{12,1}^v + P \cdot v_{XP}^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} + 60 \cdot 1 + 40 \cdot (-4) = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} = 100 \text{ kNm}$$

Σχήμα 5.5 Κατάσταση $\xi_1 = 1^v$ με ένταση από την κατάσταση "0" για τον υπολογισμό με την ΑΔΕ του φορτιστικού όρου K_{10} .

Βήμα 5. Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων και υπολογισμός της ξ_1

Η συνολική αντίδραση K_1 δίνεται από τη σχέση επαλληλίας $K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10}$ και οφείλει να είναι στον πραγματικό φορέα ίση με το μηδέν. Έτσι:

$$\xi_1 = -(K_{10}/K_{11}) = -(100/126388.89) = -7.912 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Διαγράμματα καμπτικών ροπών M (Σχ. 5.6)

Ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών επιτυγχάνεται με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας: $M_{ij} = M_{ij,0} + M_{ij,1} \cdot \xi_1$. Για τις ροπές πάκτωσης παίρνουμε:

$$M_{12} = M_{12,0} + M_{12,1} \cdot \xi_1 = 60 + (-37500) \cdot (-7.912 \cdot 10^{-4}) = 89.67 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = M_{43,0} + M_{43,1} \cdot \xi_1 = 0 + (-66666.67) \cdot (-7.912 \cdot 10^{-4}) = 52.75 \text{ kNm}$$

Με πρόσημα βάσει της σύμβασης της ίνας αναφοράς:

$$M_{12} = -89.67 \text{ kNm} \quad M_{43} = 52.75 \text{ kNm}$$

Πέραν των παραπάνω τιμών των ροπών κάμψης στους κόμβους 1 και 4, για τον σχεδιασμό του διαγράμματος ροπών απαιτείται και ο υπολογισμός της ροπής κάμψης M_P στο σημείο εφαρμογής της εξωτερικής δύναμης P . Για τον υπολογισμό της M_P θα γίνει εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας, όπως και προηγουμένως:

$$M_P = M_{P,0} + M_{P,1} \cdot \xi_1 = (5/32) \cdot (P \cdot L_{12}) + (M_{12,1}/2) \cdot (-7.912 \cdot 10^{-4}) =$$

$$= (5/32) \cdot (40 \cdot 8) + (18750) \cdot (-7.912 \cdot 10^{-4}) = 35.16 \text{ kNm}$$

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων Q (Σχ. 5.6)

Οι τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται κατά τα γνωστά (βλ. προηγούμενες ασκήσεις) από τις καμπτικές ροπές:

$$Q_{1P} = \left(\frac{M_P - M_{12}}{L_{12}/2} \right) = \frac{35.16 - (-89.67)}{4} = 31.21 \text{ kN} \quad Q_{P1} = Q_{1P}$$

$$Q_{P2} = \left(\frac{M_{21} - M_P}{L_{12}/2} \right) = \frac{0 - (35.16)}{4} = -8.79 \text{ kN} \quad Q_{2P} = Q_{P2}$$

$$Q_{43} = Q_{34} = 0 + \left(\frac{M_{43} - M_{34}}{L_{34}} \right) = \frac{(52.75) - 0}{6} = 8.79 \text{ kN}$$

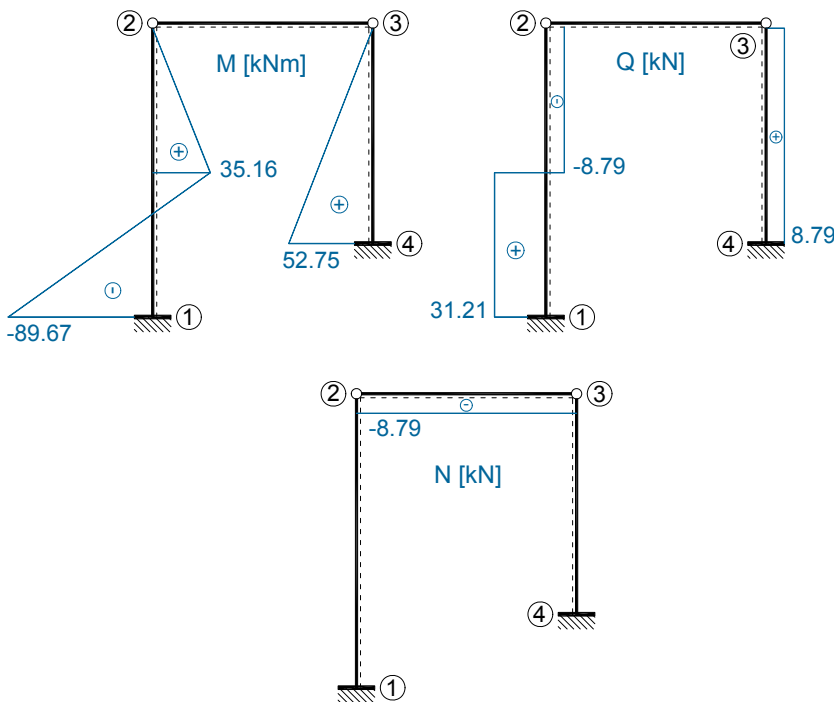
(Στις παραπάνω σχέσεις οι ροπές εισάγονται με τα πρόσημα της σύμβασης της ίνας αναφοράς.)

Διαγράμματα αξονικών δυνάμεων N (Σχ. 5.6)

Τέλος, οι αξονικές δυνάμεις μπορούν να υπολογιστούν από την κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας $\Sigma F_x=0$ και $\Sigma F_z=0$ στους κόμβους 2 και 3 του φορέα. Επειδή το αμφιαρθρωτό στοιχείο 2-3 είναι εγκάρσιως αφόρτιστο, η τέμνουσά του είναι ίση με το μηδέν και από τη συνθήκη ισορροπίας $\Sigma F_z=0$ προκύπτουν οι αξονικές δυνάμεις των στοιχείων 1-2 και 3-4 ίσες με το μηδέν. Επιπλέον, επειδή το στοιχείο 2-3 είναι και αξονικώς αφόρτιστο, η αξονική του δύναμη είναι σταθερή σε όλο το μήκος του. Επομένως, για τον υπολογισμό της αρκεί η κατάστρωση της συνθήκης ισορροπίας $\Sigma F_x=0$ στο ένα από τα δυο άκρα του (στον κόμβο 2 ή στον κόμβο 3). Με βάση τα παραπάνω παίρνουμε:

$$N_{12} = N_{21} = 0 \quad N_{34} = N_{43} = 0 \quad N_{23} = N_{32} = Q_{2P} = -8.79 \text{ kN}$$

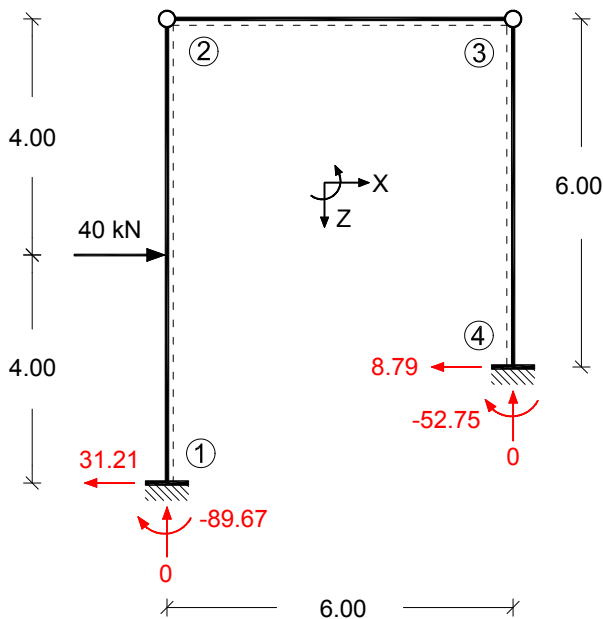
Στο ακόλουθο σχήμα 5.6 δίνονται τα διαγράμματα M , Q , N .



Σχήμα 5.6 Διαγράμματα M , Q και N του φορέα 1.

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολούθως, διενεργούνται τρεις ισορροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (Σχ. 5.7).



$$\sum F_x = 40 - 31.21 - 8.79 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0 + 0 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -89.67 - 52.75 - (8.79 \cdot 2) + (40 \cdot 4) = 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 5.7 Ισοροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Οι τρεις παραπάνω συνθήκες ισοροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισοροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.

1β. Πώς επηρεάζει την ένταση του φορέα (i) η φόρτιση του στοιχείου 2-3 με ένα συνεχές ομοιόμορφο φορτίο q και (ii) η καταναγκασμένη βύθιση v_{z4} της στήριξης 4;

(i) Φόρτιση του στοιχείου 2-3 με ένα συνεχές ομοιόμορφο φορτίο q

Γενικά, η μεταβολή της φόρτισης ενός φορέα μεταβάλλει τις τιμές των φορτιστικών όρων K_{i0} , ενώ αφήνει αμετάβλητες τις τιμές των συντελεστών στιβαρότητας K_{ij} του φορέα. Στην δική μας περίπτωση όμως, η τιμή του K_{i0} δεν αλλάζει, διότι κατά τη δυνατή μετακίνηση “ $\xi_i=1$ ”, την οποία επιβάλλουμε για τον υπολογισμό του με την ΑΔΕ (βλ. Σχ. 5.5), η δοκός 2-3 κινείται μόνο οριζοντίως και, επομένως, το κατακόρυφο φορτίο q που φέρει, δεν παράγει κανένα πρόσθετο δυνατό έργο. Έτσι, η τελική στρόφη $\xi_i=\psi_{12}$ παραμένει ίδια, όπως και πριν (λόγω της μοναχικής οριζόντιας δύναμης P). Αυτό σημαίνει ότι δεν μεταβάλλεται η καμπτική επιπόνηση (M και Q) των στοιχείων 1-2 και 3-4. Μεταβάλλονται όμως οι αξονικές τους δυνάμεις. Αυτό συμβαίνει, διότι η εγκάρσια φόρτιση q της αμφιαρθρωτής δοκού 2-3 προκαλεί κατ’ αρχάς ροπές και τέμνουσες δυνάμεις στην ίδια την δοκό 2-3 (ο υπολογισμός τους είναι στοιχειώδης). Οι τέμνουσες αυτές δυνάμεις (Q_{23} και Q_{32}) προκαλούν, στη συνέχεια, αντίστοιχες αξονικές δυνάμεις N_{21} και N_{34} στους στύλους 1-2 και 3-4, οι οποίες υπολογίζονται εύκολα από τις συνθήκες ισοροπίας $\sum F_y=0$ στους κόμβους 2 και 3 αντίστοιχα:

$$N_{12} = N_{21} = N_{34} = N_{43} = -\frac{q \cdot L_{23}}{2} = -\frac{30 \cdot 6}{2} = -90 \text{ kN}$$

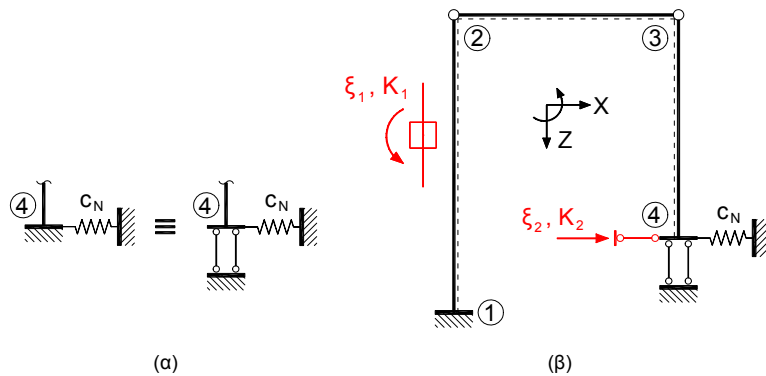
(ii) Καταναγκασμένη βύθιση v_{z4} της στήριξης 4

Η καταναγκασμένη βύθιση v_{z4} του κόμβου 4 συμπαρασύρει προς τα κάτω και τον κόμβο 3 ($v_{z3}=v_{z4}$ λόγω της ατένειας της δοκού 3-4). Επειδή, όμως, η δοκός 2-3 συνδέεται αμφιαρθρωτά στους κόμβους 2 και 3, η κατακόρυφη αυτή μετατόπιση του κόμβου 3 δεν επηρεάζει την εντασιακή της κατάσταση και, επομένως, δεν επηρεάζει και την εντασιακή κατάσταση του στοιχείου 1-2.

2. Φορέας 2

Να επισημανθούν τα σημεία στα οποία εμφανίζονται διαφοροποιήσεις στη διαδικασία επίλυσης έναντι της αντίστοιχης διαδικασίας για τον φορέα 1 και να υπολογιστούν τα άγνωστα γεωμετρικά μεγέθη.

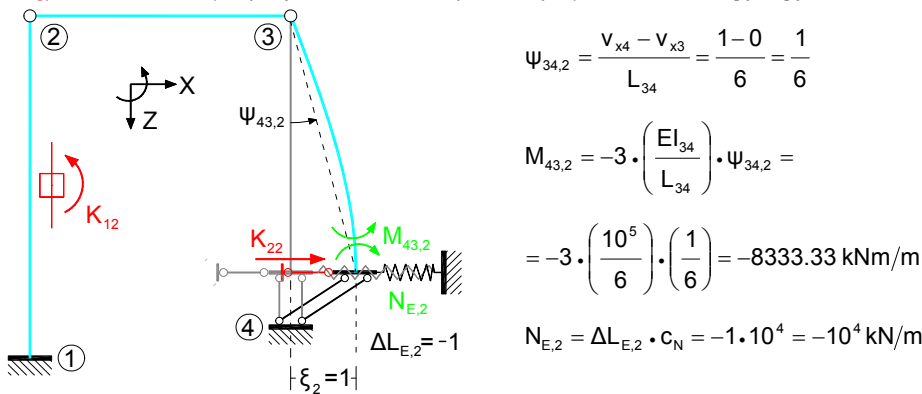
Στον φορέα 2, ο κόμβος 4 στηρίζεται ελαστικά κατά x, ενώ παραμένει ακλόνητα δεσμευμένος κατά z και άστρεπτος (πακτωμένος) ως προς τον άξονα y. Ο ακριβέστερος συμβολισμός της στήριξης του κόμβου 4 φαίνεται στο σχήμα 5.8(α). Είναι σαφές ότι η εισαγωγή του οριζώντιου ελατηρίου στον κόμβο 4 (αντί της ακλόνητης στήριξης) συνεπάγεται ένα ακόμα άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος: την οριζόντια μετατόπιση v_{x4} του κόμβου 4. Επομένως, το ΓΚΣ του φορέα 2 προκύπτει αφενός με παγίωση της στροφής της χορδής της δοκού 1-2 και αφετέρου με την παγίωση της οριζόντιας μετακίνησης του κόμβου 4 (Σχ. 5.8(β)):



Σχήμα 5.8 Συμβολικές απεικονίσεις (α) της ελαστικής στήριξης, και (β) του ΓΚΣ του φορέα 2.

Έτσι, η διαδικασία επίλυσης θα πρέπει συμπεριλάβει τον υπολογισμό της έντασης (των ροπών) του ΓΚΣ στη μοναδιαία κατάσταση " $\xi_2=1$ ", όπως, επίσης, και τον υπολογισμό των τιμών των αντιδράσεων παγίωσης K_{12} και K_{22} με θεώρηση της δυνατής μετακίνησης $\xi_2=1$.

Βήμα 3*. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης " $\xi_2=1$ "



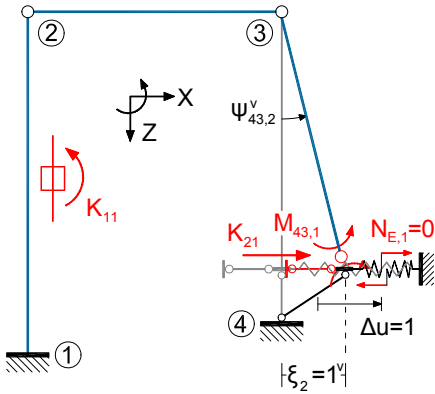
Σχήμα 5.9 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_2=1$ ".

Παρατήρηση σχετικά με τις μονάδες μέτρησης ροπών στη μοναδιαία κατάσταση " $\xi_2=u_4=1$ ":

Εφόσον η επιβαλλόμενη μοναδιαία οριζόντια μετατόπιση $\xi_1=1$ είναι αδιάστατη (Σημ.: Κανονικά οι μετατοπίσεις μειούνται σε [m]), οι μονάδες μέτρησης των αναπτυσσόμενων στην κατάσταση " $\xi_2=1$ " ροπών $M_{ik,2}$ είναι όχι [kNm], αλλά [kNm/m]. Αντίστοιχα, οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις μετριούνται σε [kN/m]. Βλ. και σχετικές παρατηρήσεις στο βήμα 3 της Άσκησης 4.

Βήμα 4*. Υπολογισμός των συντελεστών $K_{21} = K_{12}$, K_{22} και K_{20}

Ο υπολογισμός των συντελεστών $K_{21}=K_{12}$, K_{22} και K_{33} δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.

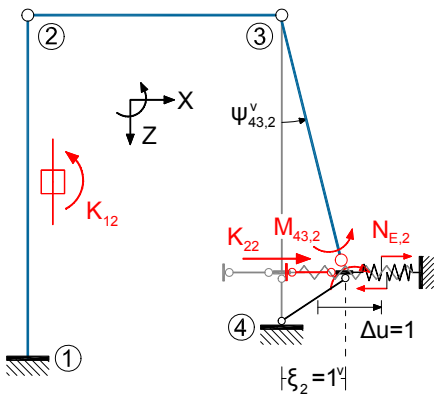


$$\psi_{43,2}^v = \frac{1}{6}$$

$$W_e^v = K_{21} \cdot 1^v + M_{43,1} \cdot \psi_{43,2}^v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{21} \cdot 1^v - 66666.67 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^v = 0 \Rightarrow$$

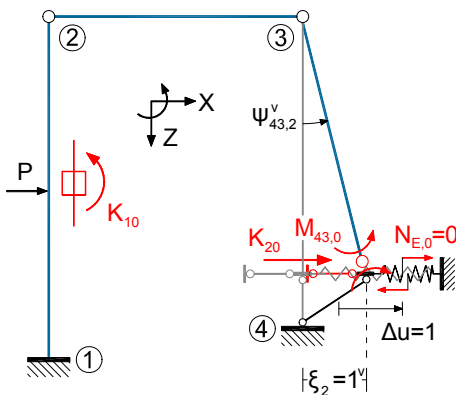
$$\Rightarrow K_{21} = 11111.12 \text{ kN}$$



$$W_e^v = K_{22} \cdot 1 + M_{43,2} \cdot \psi_{43,2} + N_{E,2} \cdot \Delta u = 0$$

$$\Rightarrow K_{22} - 8333.33 \cdot \frac{1}{6} + (-10^4) \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow K_{22} = 11388.89 \text{ kN/m}$$



$$W_e^v = K_{20} \cdot 1 + M_{43,0} \cdot \psi_{43,2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{20} - 0 \cdot \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow K_{20} = 0$$

Σχήμα 5.10 Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας K_{21} , K_{22} και του φορτιστικού όρου K_{20} .

Βήμα 5*. Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων και υπολογισμός των ξ_1 και ξ_2

Η συνολικές αντιδράσεις K_1 και K_2 , που είναι ανύπαρκτες (δηλαδή, ίσες με το μηδέν) στον πραγματικό φορέα, δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις επαλληλίας, οι οποίες αποτελούν ένα σύστημα δύο εξισώσεων για τα δύο άγνωστα μεγέθη μετακίνησης ξ_1 και ξ_2 :

$$\left. \begin{aligned} K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{12} \cdot \xi_2 + K_{10} = 0 \\ K_2 = K_{21} \cdot \xi_1 + K_{22} \cdot \xi_2 + K_{20} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 126388.9 \cdot \xi_1 + 11111.1 \cdot \xi_2 = -100 \\ 11111.1 \cdot \xi_1 + 11388.9 \cdot \xi_2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \xi_1 = -8.65 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \xi_2 = 8.44 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{aligned} \right\}$$

Βήμα 6*. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Επαφίεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

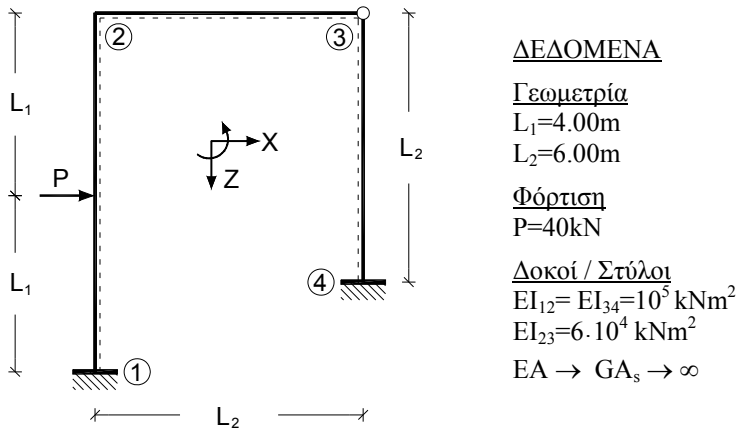
Βήμα 7*. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Επαφίεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Άσκηση 6

Εκφώνηση

Ο φορέας του σχήματος 6.0, ο οποίος προκύπτει από τον φορέα της προηγούμενης άσκησης 5 με κατάργηση της άρθρωσης στον κόμβο 2, να επιλυθεί με τη ΜΜ για τη σημειούμενη φόρτιση και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών M , τεμνουσών Q και αξονικών δυνάμεων N .

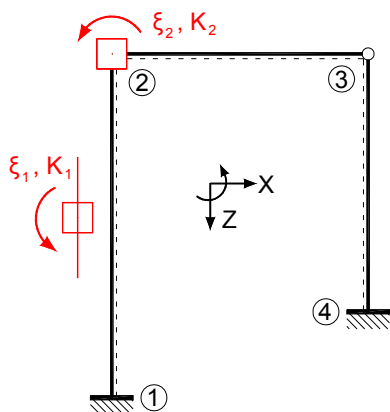


Σχήμα 6.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

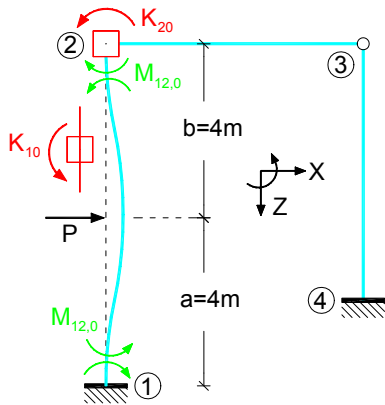
Ο φορέας είναι μία φορά κινητός, όπως και ο φορέας 1 της Άσκησης 5. Σε αντίθεση, όμως, με τον τελευταίο, όπου λόγω χρήσης των πινάκων της μονόπακτης δοκού δεν χρειάστηκε να εισαχθούν ως άγνωστα μεγέθη μετακίνησης οι στροφές εκατέρωθεν του κόμβου 2, η κατάργηση εδώ της άρθρωσης στον κόμβο 2 δημιουργεί ένα πρόσθετο άγνωστο μέγεθος, την στροφή φ_2 του κόμβου αυτού, η οποία πρέπει να δεσμευτεί στο ΓΚΣ με την τοποθέτηση δικινητής πακτώσης στον κόμβο 2. Επομένως, το ΓΚΣ του φορέα της παρούσας άσκησης προκύπτει με παγίωση της στροφής της χορδής της δοκού 1-2 (ή, εναλλακτικά, της δοκού 3-4) και ταυτόχρονα με παγίωση της στροφής του κόμβου 2 (Σχ. 6.1).



Σχήμα 6.1 Το ΓΚΣ του δεδομένου φορέα.

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"

Ο υπολογισμός των ροπών κάμψης στην κατάσταση "0" δίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



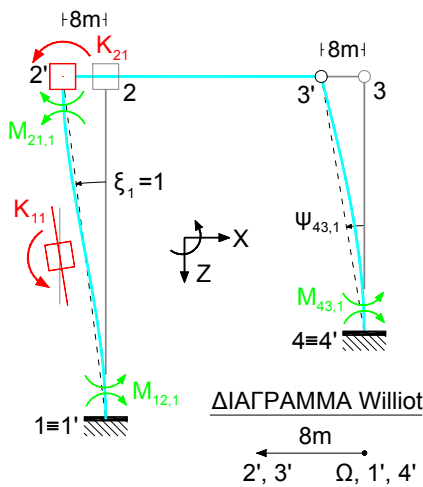
$$M_{12,0} = P \cdot a \cdot \left(\frac{b^2}{L_{12}^2} \right) = 40 \cdot 4 \cdot \left(\frac{4^2}{8^2} \right) = 40.0 \text{ kNm}$$

$$M_{21,0} = -P \cdot b \cdot \left(\frac{a^2}{L_{12}^2} \right) = -40.0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 6.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση “0”.

Βήμα 3. Υπολογισμός μεγεθών έντασης/μετακίνησης των καταστάσεων “ξ_i=1” (i=1,2)

Ο υπολογισμός των μεγεθών έντασης/μετακίνησης των καταστάσεων “ξ_i=1” (i=1,2) δίνεται στα ακόλουθα σχήματα.



$$\psi_{12,1} = \xi_1 = 1$$

$$\psi_{34,1} = \frac{v_{x4} - v_{x3}}{L_{34}} = \frac{0 - (-8)}{6} = \frac{4}{3}$$

$$M_{12,1} = M_{21,1} = -6 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{12,1} = -6 \cdot \left(\frac{10^5}{8} \right) \cdot 1 = -75000 \text{ kNm}$$

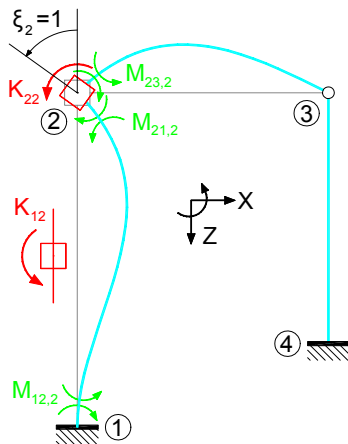
$$M_{43,1} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{34}}{L_{34}} \right) \cdot \psi_{34,1} = -3 \cdot \left(\frac{10^5}{6} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \right) = -66666.67 \text{ kNm}$$

Σχήμα 6.3-1 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση “ξ_i=1”.

Βιντεοπαρουσίαση του σχήματος 6.3-1: <https://www.youtube.com/watch?v=aRMSYHD7sw&feature=youtu.be>

Υπενθύμιση:

Όσον αφορά στις μονάδες μέτρησης των ροπών $M_{ik;n}$ ($n=1, 2$) βλ. σχετικές παρατηρήσεις στο βήμα 3 των Ασκήσεων 1 και 4.



$$\varphi_2 = \xi_2 = 1$$

$$M_{12,2} = 2 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{8} \right) \cdot 1 = 25000 \text{ kNm}$$

$$M_{21,2} = 4 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 50000 \text{ kNm}$$

$$M_{23,2} = 3 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 3 \cdot \left(\frac{6 \cdot 10^4}{6} \right) \cdot 1 = 30000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 6.3-2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_2=1$ ".

Βιντεοπαρουσίαση του σχήματος 6.3-2: <https://www.youtube.com/watch?v=UdicdwDg02c&feature=youtu.be>

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών φόρτισης K_{i0} και στιβαρότητας K_{i1} και K_{i2} ($i=1,2$)

Οι συντελεστές K_{i0} , K_{i1} και K_{i2} είναι οι αντιδράσεις (ροπές) του συνδέσμου i (δικινητή πάκτωση 1 και 2) στις καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ " αντίστοιχα. Ο υπολογισμός τους θα γίνει με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων (ΑΔΕ), όπως περιγράφηκε αναλυτικά στις προηγούμενες Ασκήσεις 4 και 5. Έτσι:

- α. Για τον υπολογισμό των K_{10} , K_{11} και K_{12} , δηλαδή της ροπής που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση της χορδής της δοκού 1-2 του ΓΚΣ στις τρεις ισορροπούσες εντασιακές καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ " αντίστοιχα, προσδίδουμε στο ΓΚΣ τη δυνατή μετακίνηση $\xi_1=1$ και εξισώνουμε τα παραγόμενα δυνατά έργα με το μηδέν (Σχ. 6.4-1).
- β. Για τον υπολογισμό των K_{20} , K_{21} και K_{22} , δηλαδή της ροπής που αναπτύσσεται στη δικινητή πάκτωση του κόμβου 2 του ΓΚΣ στις τρεις ισορροπούσες εντασιακές καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ " αντίστοιχα, προσδίδουμε στο ΓΚΣ τη δυνατή μετακίνηση $\xi_2=1$ και εξισώνουμε τα παραγόμενα δυνατά έργα με το μηδέν (Σχ. 6.4-2).

Παρατηρήσεις:

Προκειμένου κατά τη δυνατή μετακίνηση $\xi_1=1$ να αποφευχθεί η παραγωγή εσωτερικών δυνατών έργων, το ΓΚΣ μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα με εισαγωγή τριών αρθρώσεων (από μία σε κάθε άκρο του στύλου 1-2 και μία στη στήριξη 4) και ταυτόχρονη κατάλυση της στροφικής δεσμικής ράβδου που αντιστοιχεί στην ξ_1 . Στο αριστερό άκρο του ζυγώματος δεν χρειάζεται η εισαγωγή άρθρωσης, διότι ήδη με τις προηγούμενες εισαχθείσες αρθρώσεις το ΓΚΣ είναι χαλαρό. Κατά την κατάσταση δυνατής μετακίνησης $\xi_1=1$ έργο εκτελούν μόνον οι επιρράβδιες ροπές των στύλων, αφού οι κόμβοι παραμένουν εξ' ορισμού άστρεπτοι.

Προκειμένου κατά τη δυνατή μετακίνηση $\xi_2=1$ να αποφευχθεί η παραγωγή εσωτερικών δυνατών έργων, το ΓΚΣ μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα με εισαγωγή δύο αρθρώσεων εκατέρωθεν του κόμβου 2 και ταυτόχρονη κατάλυση

της στροφικής δεσμικής ράβδου που αντιστοιχεί στην ξ_2 . Έτσι, δίνοντας στον κόμβο 2 τη δυνατή στροφή $\xi_2=1^v$, οι συνδεδεμένες με αυτόν δοκοί 1-2 και 2-3 παραμένουν απαραμόρφωτες. Κατά την κατάσταση δυνατής μετακίνησης $\xi_2=1^v$, έργο εκτελούν μόνον οι επικόμβιες ροπές στον κόμβο 2, αφού ο υπόλοιπος φορέας παραμένει απαραμόρφωτος.

Υπενθυμίζεται ότι ο υπολογισμός των K_{2i} μπορεί να γίνει πολύ απλά και με τη συνθήκη ισορροπίας του κόμβου 2 σε κάθε μία από τις θεωρούμενες καταστάσεις "0", " $\xi_i=1$ " ($i=1, 2$). Η συνθήκη αυτή ισορροπίας οδηγεί στην ίδια ουσιαστικά εξίσωση για το K_{2i} , όπως και η εφαρμογή της ΑΔΕ. Άλλωστε, οι συνθήκες ισορροπίας και η ΑΔΕ είναι ισοδύναμες και μπορούν, γενικότερα, να χρησιμοποιηθούν αμφότερες για τον υπολογισμό οποιασδήποτε συντελεστή στιβαρότητας K_{ij} ή φορτίου K_{i0} .

$W_e^v = 0 \Rightarrow$

$$K_{10} \cdot 1^v + (M_{12,0} + M_{21,0}) \cdot \psi_{12,1}^v + P \cdot v_{xP}^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} \cdot 1^v + (40 - 40) \cdot 1^v + 40 \cdot (-4)^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} = 160 \text{ kNm}$$

$W_e^v = 0 \Rightarrow$

$$K_{11} \cdot 1^v + (M_{12,1} + M_{21,1}) \cdot \psi_{12,1}^v + M_{43,1} \cdot \psi_{43,1}^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{11} \cdot 1^v + (-2 \cdot 75000) \cdot 1^v + (-66666.67) \cdot 1.33^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} = 238888.89 \text{ kNm}$$

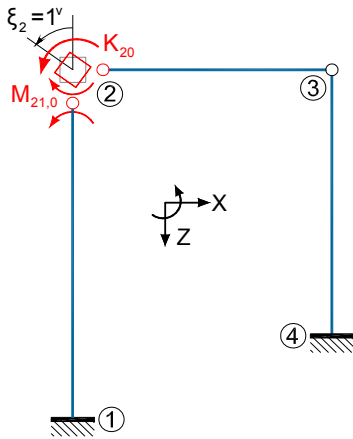
$W_e^v = 0 \Rightarrow$

$$K_{12} \cdot 1^v + (M_{12,2} + M_{21,2}) \cdot \psi_{12,1}^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{12} \cdot 1^v + (25000 + 50000) \cdot 1^v = 0$$

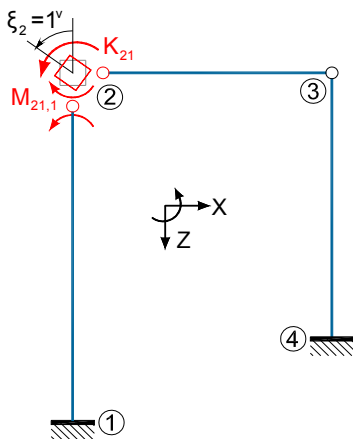
$$\Rightarrow K_{12} = -75000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 6.4-1 Κατάσταση δυνατής μετακίνησης " $\xi_1=1^v$ " με ένταση από τις καταστάσεις "0" και " $\xi_i=1$ " για τον υπολογισμό των K_{1i} ($i=0,1,2$).



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{20} \cdot 1^v - M_{21,0} \cdot 1^v = 0$$

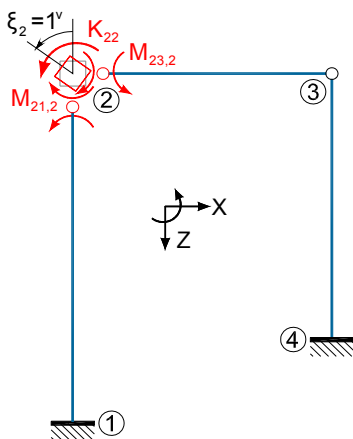
$$\Rightarrow K_{20} \cdot 1^v - (-40) \cdot 1^v = 0 \Rightarrow K_{20} = -40 \text{ kNm}$$



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{21} \cdot 1^v - M_{21,1} \cdot 1^v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{21} \cdot 1^v - (-75000) \cdot 1^v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{21} = -75000 \text{ kNm}$$



$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{22} \cdot 1^v - (M_{21,2} + M_{23,2}) \cdot 1^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{22} \cdot 1^v - (50000 + 30000) \cdot 1^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{22} = 80000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 6.4-2 Κατάσταση δυνατής μετακίνησης " $\xi_2=1^v$ " με ένταση από τις καταστάσεις "0" και " $\xi_i=1$ " για τον υπολογισμό των K_{2i} ($i=0,1,2$).

Βήμα 5. Κατάστροψη του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας και υπολογισμός των ξ_i

Οι εξισώσεις ισορροπίας εκφράζουν τη συνθήκη μηδενισμού των αντιδράσεων πάκτωσης και παγίωσης K_1, K_2 στον δεδομένο φορέα. Σύμφωνα με τα προηγηθέντα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} K_{11} \cdot \xi_1 + K_{12} \cdot \xi_2 + K_{10} &= 0 \\ K_{21} \cdot \xi_1 + K_{22} \cdot \xi_2 + K_{20} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 238888.89 \cdot \xi_1 - 75000 \cdot \xi_2 + 160 &= 0 \\ -75000 \cdot \xi_1 + 80000 \cdot \xi_2 - 40 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \xi_1 &= -7.27 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \xi_2 &= -1.81 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned} \right.$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Διαγράμματα καμπτικών ροπών M (Σχ. 6.5)

Ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών γίνεται με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας:

$$M_{ij} = M_{ij,0} + M_{ij,1} \cdot \xi_1$$

Έτσι, έχουμε:

$$M_{12} = 40 + (-75000) \cdot (-7.27 \cdot 10^{-4}) + 25000 \cdot (-1.81 \cdot 10^{-4}) = 89.97 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -40 + (-75000) \cdot (-7.27 \cdot 10^{-4}) + 50000 \cdot (-1.81 \cdot 10^{-4}) = 5.44 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = 30000 \cdot (-1.81 \cdot 10^{-4}) = -5.44 \text{ kNm}$$

$$M_{43} = (-66666.67) \cdot (-7.27 \cdot 10^{-4}) = 48.45 \text{ kNm}$$

$$M_p = \frac{40 \cdot 8}{8} + 0 \cdot (-7.27 \cdot 10^{-4}) + \left(\frac{50000}{4} \right) \cdot (-1.81 \cdot 10^{-4}) = 37.73 \text{ kNm}$$

Με τα πρόσημα της σύμβασης της ίνας αναφοράς:

$$M_{12} = -89.97 \text{ kNm} \quad M_{21} = 5.44 \text{ kNm} \quad M_{23} = 5.44 \text{ kNm} \quad M_{43} = 48.45 \text{ kNm} \quad M_p = 37.73 \text{ kNm}$$

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων Q (Σχ. 6.5)

Οι τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται κατά τα γνωστά (βλ. προηγούμενες ασκήσεις) από τις καμπτικές ροπές:

$$Q_{1P} = \left(\frac{M_p - M_{12}}{L_{12}/2} \right) = \frac{37.73 - (-89.97)}{4} = 31.93 \text{ kN} \quad Q_{P1} = Q_{1P}$$

$$Q_{P2} = \left(\frac{M_{21} - M_p}{L_{12}/2} \right) = \frac{5.44 - (37.73)}{4} = -8.07 \text{ kN} \quad Q_{2P} = Q_{P2}$$

$$Q_{23} = Q_{32} = 0 + \left(\frac{M_{32} - M_{23}}{L_{23}} \right) = \frac{0 - 5.44}{6} = -0.91 \text{ kN}$$

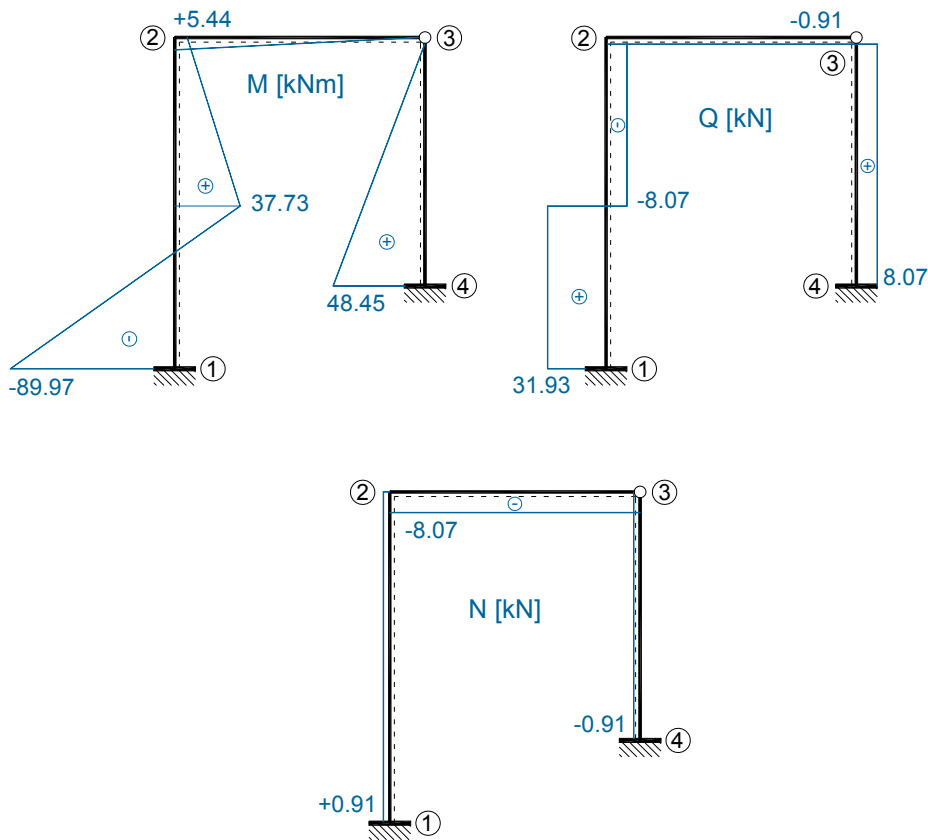
$$Q_{43} = Q_{34} = 0 + \left(\frac{M_{43} - M_{34}}{L_{34}} \right) = \frac{(48.45) - 0}{6} = 8.07 \text{ kN}$$

(Στις παραπάνω σχέσεις οι ροπές εισάγονται με τα πρόσημα της σύμβασης της ίνας αναφοράς)

Διαγράμματα αξονικών δυνάμεων N (Σχ. 6.5)

Οι αξονικές δυνάμεις μπορούν να υπολογιστούν με κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_z = 0$ στους κόμβους 2 και 3 του φορέα. Επειδή όλα τα στοιχεία είναι αξονικώς αφόρτιστα, η αξονική τους δύναμη είναι σταθερή σε όλο το μήκος τους. Με βάση όλα τα παραπάνω παίρνουμε:

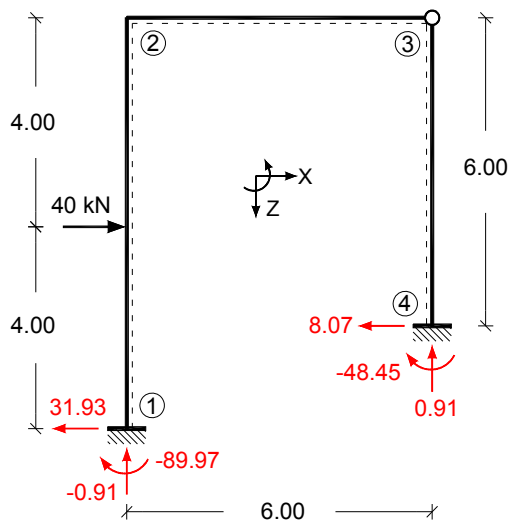
$$N_{12} = N_{21} = -Q_{23} = 0.91 \text{ kN} \quad N_{34} = N_{43} = Q_{32} = -0.91 \text{ kN} \quad N_{23} = N_{32} = Q_{2P} = -8.07 \text{ kN}$$



Σχήμα 6.5 Διαγράμματα M , Q και N του δεδομένου φορέα.

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολουθώς διενεργούνται τρεις ισοροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (Σχ. 6.6).



$$\sum F_x = 40 - 31.93 - 8.07 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0.91 - 0.91 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -89.97 - 48.45 - (0.91 \cdot 6) - (8.07 \cdot 2) + (40 \cdot 4) = -0.02 \approx 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 6.6 Ισοροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Οι τρεις παραπάνω συνθήκες ισορροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισοροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 2

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
- [2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙ: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Κεφάλαιο 3

Κινητοί ατενείς φορείς με απολύτως στερεά τμήματα

Σύνοψη

Οι ασκήσεις 7 και 8 του κεφαλαίου αυτού αφορούν σε κινητούς ατενείς φορείς, οι οποίοι συμπεριλαμβάνουν απολύτως στερεά τμήματα, δηλαδή τμήματα των οποίων όχι μόνον η δυσστησία και η δυστένεια, αλλά και η δυσκαμψία θεωρούνται ως άπειρες. Η θεώρηση ορισμένων δομικών στοιχείων ως απολύτως στερεών, κρίνεται πολλές φορές κατά την προσομοίωση πραγματικών στατικών φορέων ως σκόπιμη και ρεαλιστική απλοποίηση. Στην Άσκηση 7 γίνεται ο υπολογισμός των διαγραμμάτων M , Q , N ενός μονώροφου δίστυλου πλαισίου (φορέας με έναν βαθμό ελευθερίας) υπό οριζόντιο συγκεντρωμένο φορτίο. Στην Άσκηση 8 γίνεται ο υπολογισμός των διαγραμμάτων M , Q , N ενός διώροφου δίστυλου πλαισίου (φορέας με δύο βαθμούς ελευθερίας) υπό οριζόντιο τριγωνικά κατανεμημένο φορτίο και, επιπλέον, υπολογίζεται η ελαστική του παραμόρφωση (ελαστική γραμμή).

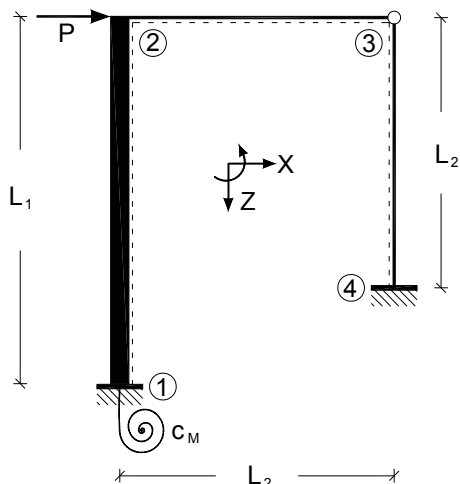
Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων (βλ. π.χ. [2]-κεφ.3) και οπωσδήποτε η μελέτη των ασκήσεων 1, 2, 3 του κεφαλαίου 1 και 4, 5, 6 του κεφαλαίου 2. Σε κάθε περίπτωση, απαιτείται καλή γνώση της Στατικής των ισοστατικών φορέων, καθώς και επαρκής εξοικείωση με τη Μέθοδο των υπεραριθμών δυνάμεων για υπερστατικούς φορείς (βλ. π.χ. [1] και [2]-κεφ.2, καθώς και λοιπή σχετική βιβλιογραφία της παραγράφου Ε7).

Άσκηση 7

Εκφώνηση

Να επιλυθεί ο φορέας του σχήματος 7.0 με τη ΜΜ και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών M , τεμνουσών Q και αξονικών δυνάμεων N .



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία

$$L_1=8.00\text{m}$$

$$L_2=6.00\text{m}$$

Φόρτιση

$$P=40\text{kN}$$

Δοκοί/Ελατήριο

$$EI_{12} \rightarrow EA_{12} \rightarrow GA_{S12} \rightarrow \infty$$

$$EI_{34}=10^5 \text{ kNm}^2$$

$$EI_{23}=6 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$$

$$EA \rightarrow GA_s \rightarrow \infty$$

$$c_M=10^4 \text{ kNm/rad}$$

Σχήμα 7.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

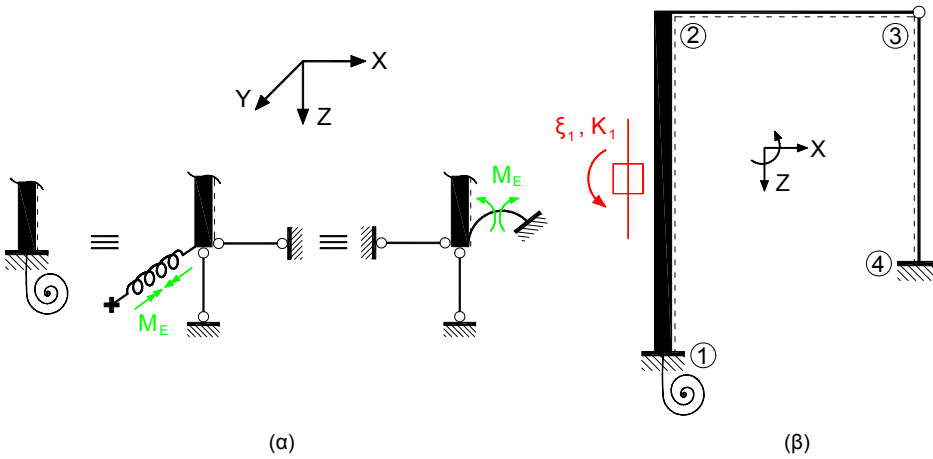
Αν ο στύλος 1-2 του φορέα του σχήματος 7.0 είχε πεπερασμένη δυσκαμψία EI_{12} , τότε θα διέφερε από τον φορέα της Άσκησης 7 μόνο ως προς την ελαστική πάκτωση στη στήριξη 1, λόγω της οποίας η βάση (δηλαδή ο κόμβος 1) του στύλου μπορεί λόγω της φόρτισης να υποστεί μία στροφή φ_1 . Επομένως, εκτός των δύο άγνωστων μετακινήσεων $\xi_1=\psi_{12}$ και $\xi_2=\varphi_2$ του φορέα της Άσκησης 7, θα έπρεπε να εισάγουμε ως τρίτο άγνωστο μέγεθος μετακίνησης τη στροφή φ_1 του κόμβου 1.

Η ιδιομορφία της παρούσας άσκησης συνίσταται στο γεγονός ότι ο στύλος 1-2 θεωρείται, όχι μόνον ως ατελής ($EA_{12} \rightarrow \infty$) και άτμητος ($GA_{S12} \rightarrow \infty$), αλλά και ως άκαμπτος ($EI_{12} \rightarrow \infty$), δηλαδή συνολικά ως απολύτως στερεός και συνεπώς απαραμόρφωτος. Έτσι, αν ο ελαστικά πακτωμένος στύλος 1-2 υποστεί υπό την επίδραση της φόρτισης μία στροφή απολύτως στερεού σώματος, τότε η στροφή ψ_{12} της χορδής του ταυτίζεται με τις στροφές φ_1 και φ_2 των κόμβων του 1 και 2 (όπως και με τη στροφή κάθε άλλου σημείου επ' αυτού): $\psi_{12} = \varphi_1 = \varphi_2$. Επομένως, παραμένει ένα μόνο άγνωστο μέγεθος μετακίνησης, π.χ. η ψ_{12} .

Υπενθυμίζεται ότι λόγω της ατένειας του στύλου 3-4 ο κόμβος 3 δεν μπορεί να μετατοπιστεί κατακορύφως, ενώ κατά την οριζόντια διεύθυνση η μετατόπισή του είναι ακριβώς ίση με τη μετατόπιση του κόμβου 2 λόγω της ατένειας του ζυγώματος 2-3.

Επίσης υπενθυμίζεται ότι, αν και οι στροφές εκατέρωθεν του αρθρωτού κόμβου 3 είναι άγνωστες, η δυνατότητα χρήσης των πινάκων της μονόπακτης δοκού μας επιτρέπει να μην εισάγουμε τις άγνωστες αυτές στροφές ως γεωμετρικώς υπεράριθμα μεγέθη.

Με βάση όλα τα παραπάνω, το ΓΚΣ του φορέα προκύπτει απλώς με τη δικινητή πάκτωση της χορδής του στύλου 1-2, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.1.

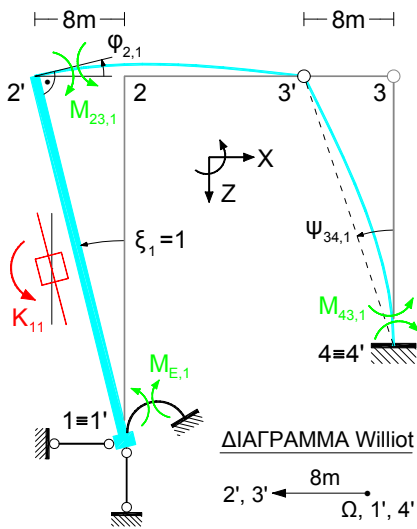


Σχήμα 7.1 (α) Εναλλακτικές συμβολικές απεικονίσεις της ελαστικής πάκτωσης, (β) Το ΓΚΣ του δεδομένου φορέα.

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"

Η φόρτιση του φορέα αποτελείται μόνον από την οριζόντια δύναμη P στον κόμβο 2. Αυτό σημαίνει ότι στην κατάσταση "0" το ΓΚΣ δεν παραμορφώνεται, αφού τα αμφίπακτα ή μονόπακτα στοιχεία, από τα οποία αποτελείται, είναι αφόρטיστα μεταξύ των κόμβων τους (οι οποίοι στην κατάσταση "0" παραμένουν αμετατόπιστοι). Επομένως, στην κατάσταση "0" δεν αναπτύσσονται ροπές στο ΓΚΣ.

Βήμα 3. Υπολογισμός μεγεθών έντασης/μετακίνησης της κατάστασης "ξ₁=1" (Σχ. 7.2)



$$\psi_{12,1} = \xi_1 = 1$$

$$\psi_{34,1} = \frac{v_{x4} - v_{x3}}{L_{34}} = \frac{0 - (-8)}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\varphi_{2,1} = \psi_{12,1} = 1$$

$$v_{x2,1} = -8\text{m}$$

$$M_{23,1} = 3 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_{2,1} = 30000\text{kNm}$$

$$M_{43,1} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{34}}{L_{34}} \right) \cdot \psi_{34,1} = -66666.67\text{kNm}$$

$$M_{E,1} = -c_M \cdot \psi_{12,1} = -10000\text{kNm}$$

(Για τις ροπές κάμψης των μονόπακτων στοιχείων βλ. Πίνακες 2α και 2β.)

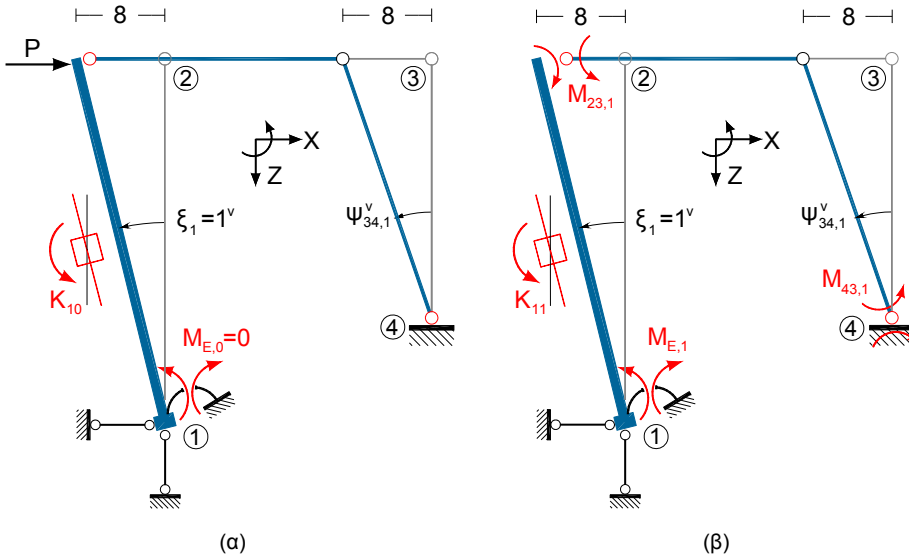
Σχήμα 7.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "ξ₁=1".

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών φόρτισης και στιβαρότητας (εδώ: K₁₀ και K₁₁)

Ο υπολογισμός θα γίνει με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων. Η δυνατή μετακίνηση που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των K₁₀ και K₁₁ είναι η ξ₁=1^v, έτσι ώστε οι ζητούμενοι συντελεστές K₁₀ και K₁₁ να εκτελέσουν δυνατό έργο σε αυτήν και να υπεισέλθουν στην εξίσωση έργων. Προκειμένου κατά την επιβολή της ξ₁=1^v να αποφευχθεί η παραγωγή εσωτερικών δυνατών έργων (και οι συνεπαγόμενες ανεπιθύμητες ολοκληρώσεις που θα απαιτούσε ο υπολογισμός τους), το ΓΚΣ μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα με εισαγωγή μίας άρθρωσης στο αριστερό άκρο του ζυγώματος 2-3 και μίας ακόμη άρθρωσης στη βάση του στύλου 1-2. Η τελευταία αντιστοιχεί σε μία τομή (κατάλυση συνέχειας) του στροφικού ελατηρίου της ελαστικής πάκτωσης του κόμβου 1. Ταυτόχρονα καταλύεται η στροφική δεσμική ράβδος που αντιστοιχεί στην ξ₁ (Σχ. 7.3).

Η αντίδραση K_{10} υπολογίζεται από την κατάστρωση της εξίσωσης του δυνατού έργου, το οποίο παράγεται από τα ισορροπούντα εντασιακά μεγέθη του ΓΚΣ στην κατάσταση “0” κατά την δυνατή μετακίνηση $\xi_1=1^v$. Με τη βοήθεια του σχήματος 7.3(α) προκύπτει:

$$W_e^v = K_{10} \cdot 1^v + P \cdot v_{x2,1}^v = 0 \Rightarrow K_{10} \cdot 1^v + 40 \cdot (-8^v) = 0 \Rightarrow K_{10} = 320 \text{ kNm}$$



Σχήμα 7.3 Υπολογισμός των συντελεστών K_{10} και K_{11} με την ΑΔΕ.

Αντίστοιχα, η αντίδραση K_{11} υπολογίζεται από την κατάστρωση της εξίσωσης του δυνατού έργου, το οποίο παράγεται από τα ισορροπούντα εντασιακά μεγέθη του ΓΚΣ στην κατάσταση “ $\xi_1=1$ ” κατά τη δυνατή μετακίνηση $\xi_1=1^v$. Με τη βοήθεια του σχήματος 7.3β προκύπτει:

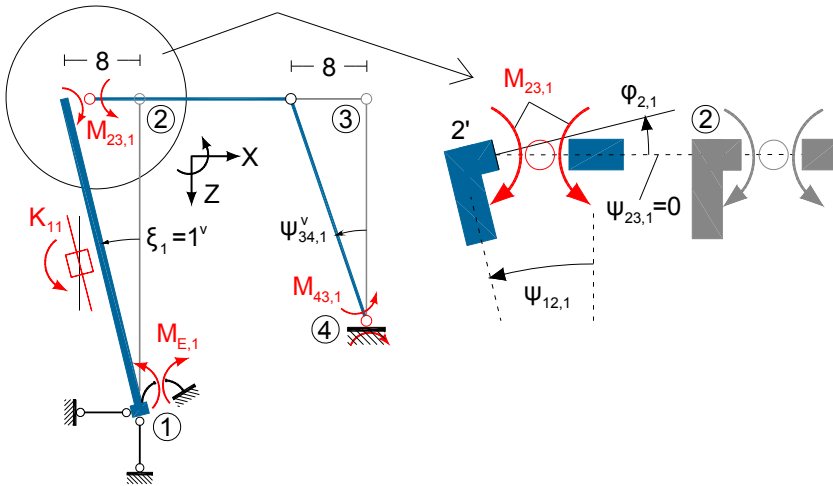
$$W_e^v = K_{11} \cdot 1^v - M_{23,1} \cdot \psi_{12,1}^v + M_{E,1} \cdot \psi_{12,1}^v + M_{43,1} \cdot \psi_{34,1}^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} \cdot 1^v - 30000 \cdot 1^v + (-10000) \cdot 1^v + (-66666.67) \cdot 1.333^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} = 128888.89 \text{ kNm}$$

Ιδιαίτερα τονίζεται η συμμετοχή της ροπής $M_{23,1}$ στην παραπάνω εξίσωση. Οι ροπές που προσάγονται στα σημεία που εισήχθησαν αρθρώσεις, είναι οι προϋπάρχουσες εκεί εσωτερικές ροπές, οι οποίες εξ ορισμού εμφανίζονται κατά ζεύγη. Το ένα σκέλος του ζεύγους δρα επί της προσκείμενης ράβδου (επιρράβδια ροπή) και το άλλο επί του προσκείμενου κόμβου (επικόμβια ροπή). Στη δική μας περίπτωση, το επιρράβδιο σκέλος της ροπής $M_{23,1}$ δεν παράγει δυνατό έργο, διότι η χορδή της δοκού 2-3 δεν στρέφεται στην κατάσταση $\xi_1=1^v$. Αντίθετα, το επικόμβιο σκέλος της ροπής $M_{23,1}$ παράγει έργο στην στροφή του κόμβου 2, η οποία λόγω της ακαμψίας του στύλου 1-2 είναι ίση με τη στροφή της χορδής του στύλου αυτού: $\varphi_{2,1}^v = \psi_{12,1}^v = \xi_1 = 1^v$ (βλ. λεπτομέρεια άνω δεξιά στο Σχ. 7.4).

Επίσης, στην εξίσωση δυνατών έργων συμμετέχει το επιρράβδιο σκέλος της ροπής $M_{E,1}$ του στροφικού ελατηρίου στον κόμβο 1. Η επιρράβδια αυτή ροπή $M_{E,1}$ παράγει δυνατό έργο στη δυνατή στροφή $\psi_{12,1}^v = \xi_1 = 1^v$ της χορδής του στύλου 1-2.



Σχήμα 7.4 Λεπτομέρεια κόμβου 2 στην κατάσταση δυνατής μετακίνησης $\xi_1=1^v$.

Με γνωστούς τους συντελεστές στιβαρότητας K_{11} και φόρτισης K_{10} , ακολουθεί ο υπολογισμός της υπεράριθμης μετακίνησης ξ_1 και, εν συνεχεία, ο υπολογισμός των τελικών εντασιακών μεγεθών.

Βήμα 5. Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας και υπολογισμός της ξ_1

Η εξίσωση ισορροπίας από την οποία προσδιορίζεται η υπεράριθμη ξ_1 είναι:

$$K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10} = 0 \Rightarrow 128888.89 \cdot \xi_1 + 320 = 0 \Rightarrow \xi_1 = -0.002483 \text{rad}$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Ροπές κάμψης

Ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών γίνεται με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας:

$$\begin{aligned} M_{23} &= -M_{21} = -(-0.002483) \cdot 30000 = 74.48 \text{kNm} \\ M_{43} &= (-0.002483) \cdot (-66666.67) = 165.52 \text{kNm} \\ M_{12} &= M_{E,0} = M_{E,1} \cdot \xi_1 = 0 + (-10000) \cdot (-0.002483) = -24.83 \text{kNm} \end{aligned}$$

και με πρόσημα βάσει ίνας αναφοράς:

$$M_{23} = M_{21} = 74.48 \text{kNm} \quad M_{43} = 165.52 \text{kNm} \quad M_{12} = -24.83 \text{kNm}$$

Τέμνουσες δυνάμεις

Οι τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται κατά τα γνωστά από τις καμπτικές ροπές:

$$Q_{23} = Q_{32} = -12.41 \text{kN} \quad Q_{43} = Q_{34} = 27.59 \text{kN} \quad Q_{12} = Q_{21} = 12.41 \text{kN}$$

Αξονικές δυνάμεις

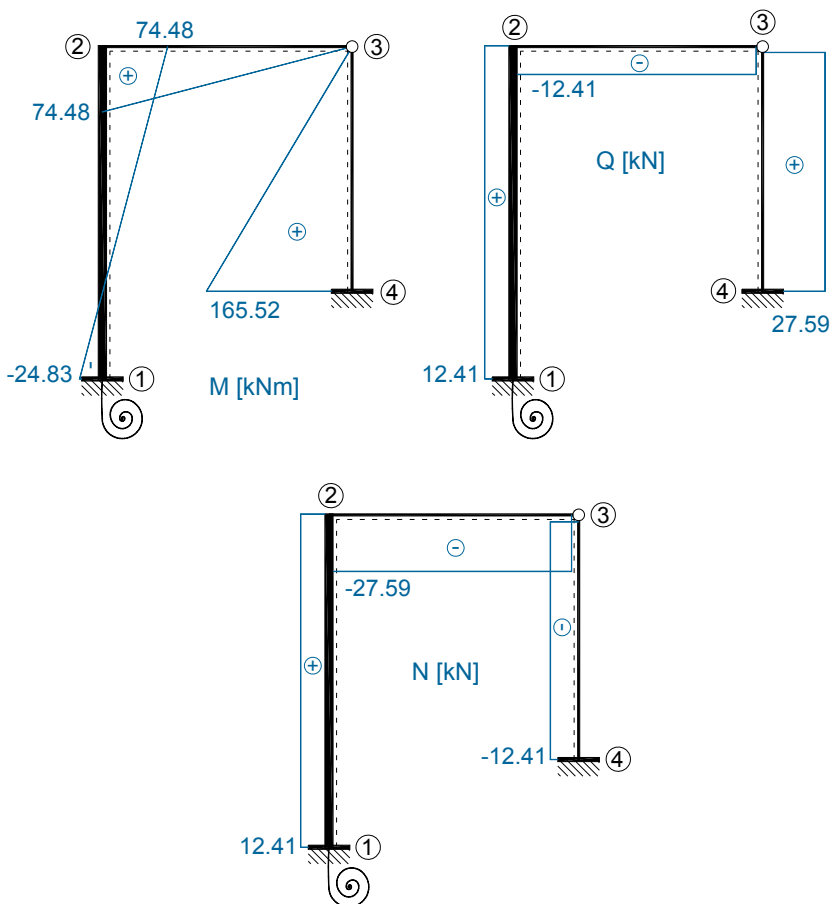
Οι αξονικές δυνάμεις υπολογίζονται καταστρώνοντας τις εξισώσεις ισορροπίας $\Sigma F_x=0$ και $\Sigma F_z=0$ των δυνάμεων που δρουν στους κόμβους 2 και 3 του φορέα. Σημειώνεται ότι, επειδή τα στοιχεία του φορέα είναι αξονικώς αφόρτιστα, οι αξονικές δυνάμεις είναι σταθερές σε όλο το μήκος τους. Έτσι:

$$\text{Κόμβος 2} \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \Rightarrow N_{23} + P - Q_{21} = 0 \Rightarrow N_{23} = -40 + 12.41 = -27.59 \text{kN} \\ \Sigma F_z = 0 \Rightarrow N_{21} + Q_{23} = 0 \Rightarrow N_{21} = -(-12.41) = 12.41 \text{kN} \end{cases}$$

$$\text{Κόμβος 3} \rightarrow \Sigma F_z = 0 \Rightarrow N_{34} - Q_{32} = 0 \Rightarrow N_{34} = (-12.41) = -12.41 \text{kN}$$

$$N_{12} = N_{21} = 12.41 \text{kN} \quad N_{32} = N_{23} = -27.59 \text{kN} \quad N_{43} = N_{34} = -12.41 \text{kN}$$

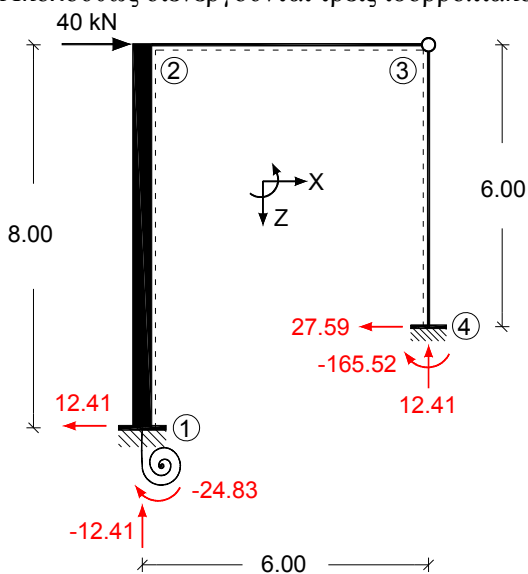
Στο ακόλουθο σχήμα δίνονται τα διαγράμματα M, Q, N.



Σχήμα 7.5 Διαγράμματα M, Q και N του δεδομένου φορέα.

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολούθως διενεργούνται τρεις ισοροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (βλ. Σχ. 7.6).



$$\sum F_x = 40 - 12.41 - 27.59 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 12.41 - 12.41 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -24.83 - 165.52 - (12.41 \cdot 6) - (27.59 \cdot 2) + (40 \cdot 8) = 0.01 \approx 0 \text{ kNm}$$

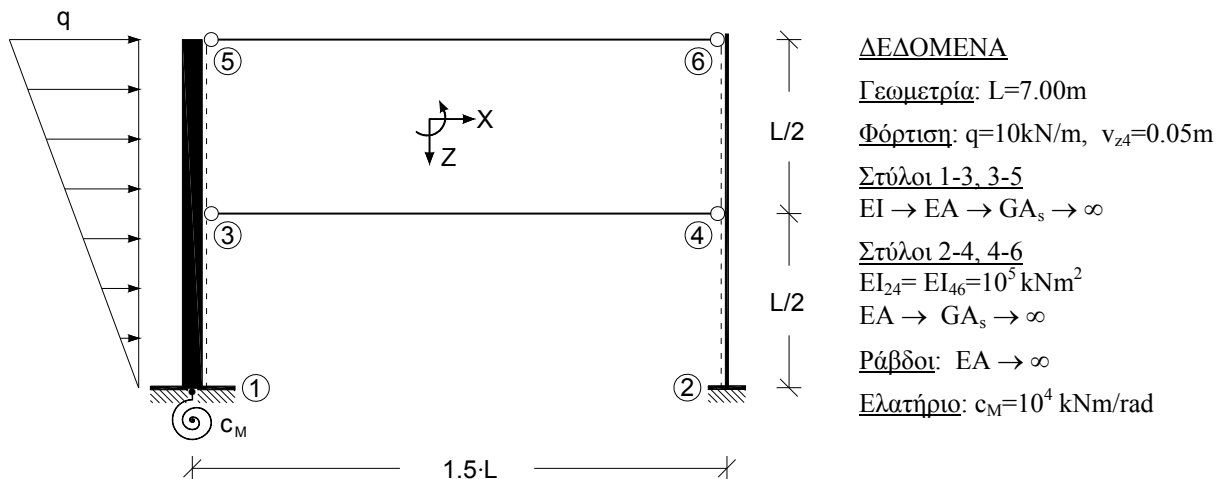
Σχήμα 7.6 Ισορροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Οι τρεις παραπάνω συνθήκες ισορροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισορροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφένται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Άσκηση 8

Εκφώνηση

Ο φορέας του σχήματος 8.0, του οποίου το στοιχείο 1-3-5 θεωρείται απολύτως στερεό και ελαστικά πακτωμένο στο στερεό υπόβαθρο, να επιλυθεί με τη ΜΜ για τη δεδομένη τριγωνική καθύψος φόρτιση q . Η επιλογή του ΓΚΣ να αιτιολογηθεί και εκτός από τα διαγράμματα ροπών, τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων να σχεδιαστεί (ποιοτικά) και η ελαστική γραμμή.



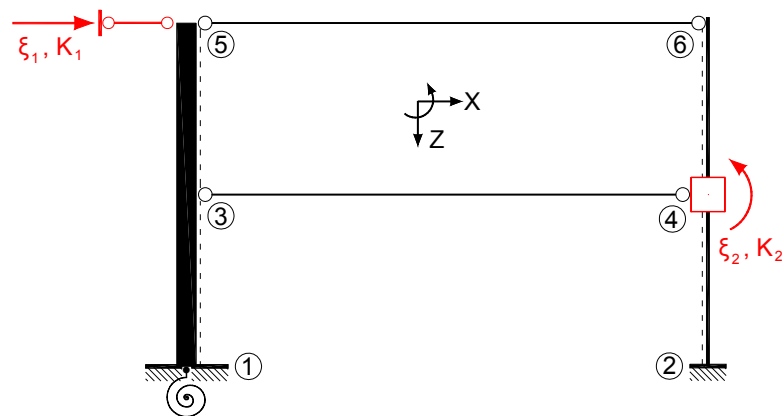
Σχήμα 8.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Το γεγονός ότι το κατακόρυφο στοιχείο 1-3-5 είναι απολύτως στερεό οδηγεί άμεσα στο συμπέρασμα, ότι με την εισαγωγή μίας και μόνον οριζόντιας δεσμικής ράβδου στον κόμβο 5 (βλ. Σχ. 8.1), επιτυγχάνονται ταυτόχρονα:

- η οριζόντια παγίωση των κόμβων 3 και 5, και
- η πάκτωση (δηλ., ο μηδενισμός της δυνατότητας στροφής) του ελαστικώς πακτωμένου κόμβου 1, καθώς και των κόμβων 3 και 5.



Σχήμα 8.1 Το ΓΚΣ του δεδομένου φορέα.

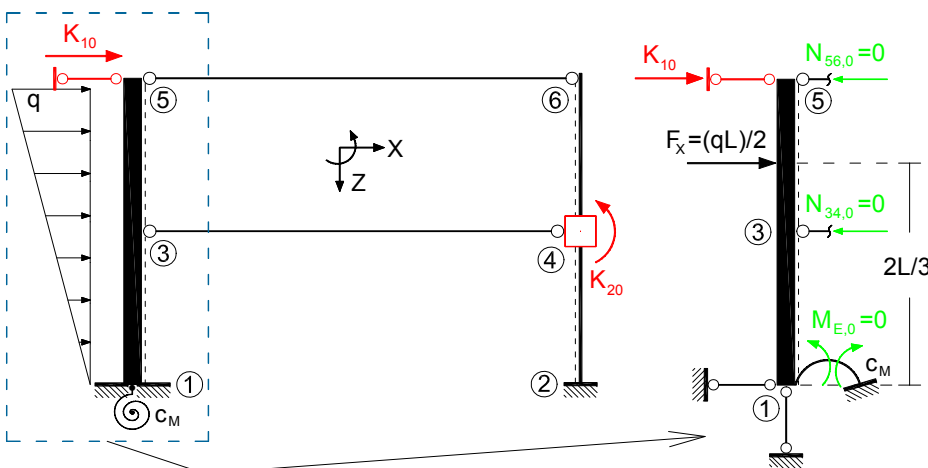
Επίσης, δεδομένου ότι οι δύο οριζόντιες ράβδοι 3-4 και 5-6 είναι ατενείς, η προσθήκη της οριζόντιας δεσμικής ράβδου στον κόμβο 5 συνεπάγεται την οριζόντια παγίωση και των «απέναντι» κόμβων 6 και 4. Οι κόμβοι 3 και 5, όπως και οι κόμβοι 4 και 6, είναι βέβαιο (λόγω της ατένειας των στύλων 2-4 και 4-6

αντιστοίχως) κατακόρυφως αμετατόπιστοι. Επιπλέον, λόγω της δυνατότητας χρήσης πινάκων για μονόπακτες δοκούς δεν απαιτείται η δικινητή πάκτωση των αρθρωτών άκρων των στοιχείων (εν προκειμένω του στοιχείου 4-6). Απομένει η αναγκαιότητα δικινητής πάκτωσης του κόμβου 4, στον οποίο συνδέονται μονολιθικά οι στύλοι 2-4 και 4-6. Με τις δύο παραπάνω δεσμεύσεις μηδενίζονται οι βαθμοί ελευθερίας του δεδομένου φορέα και προκύπτει το ΓΚΣ. (Σημ.: Οι εγκαρσίως αφόρτιστες ράβδοι 3-4 και 5-6 μεταφέρουν μόνον αξονικές δυνάμεις και δεν υφίστανται καμπτικές παραμορφώσεις.)

Εναλλακτικά, αντί της οριζόντιας παγίωσης του κόμβου 5 (→ άγνωστο μέγεθος η οριζόντια μετατόπιση u_5), θα ήταν δυνατόν να εισαχθεί μία δικινητή πάκτωση στον κόμβο 1 (→ άγνωστο μέγεθος η στροφή ϕ_1). Στην περίπτωση αυτή διαφοροποιούνται, προφανώς, η φυσική σημασία και οι τιμές των συντελεστών στιβαρότητας K_{11} , K_{12} και του συντελεστή φορτίου K_{10} . Είναι σαφές ότι η επιλογή αυτή ταυτόσημη με την εισαγωγή μιάς δικινητής πάκτωσης της χορδής 1-3-5, αφού λόγω της ακαμψίας του στοιχείου 1-3-5, η στροφή χορδής ψ_{1-3-5} ισούται με την στροφή ϕ_1 του κάτω άκρου του στοιχείου αυτού.

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"

Η εξωτερική φόρτιση ασκείται στο απολύτως στερεό στοιχείο 1-3-5, το οποίο παραμένει (εξ ορισμού) άκαμπτο και κατακόρυφο (δεν στρέφεται). Εφόσον οι κόμβοι 1, 3 και 5 ούτε στρέφονται ούτε μετατοπίζονται, η ελαστική γραμμή του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" ταυτίζεται με την απαραμόρφωτη κατάσταση του φορέα και ο υπόλοιπος φορέας (εκτός του στοιχείου 1-3-5) παραμένει άτονος (χωρίς ένταση). Προφανώς, μηδενική είναι και η ροπή στο στροφικό ελατήριο του κόμβου 1, αφού ο κόμβος δεν υφίσταται στροφή. Όλη η οριζόντια φόρτιση παραλαμβάνεται από τις οριζόντιες δεσμικές ράβδους στους κόμβους 5 και 1.



Σχήμα 8.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0".

Έτσι, ένταση υπάρχει μόνον στο άκαμπτο στοιχείο 1-3-5 που δέχεται την εξωτερική φόρτιση. Η ένταση αυτή (τέμνουσες και ροπές) δεν μπορεί να υπολογιστεί, ακριβώς λόγω της παραδοχής της ακαμψίας (και της μη ισοστατικής στήριξης του στοιχείου). Εντούτοις, η γνώση της έντασης του στοιχείου 1-3-5 δεν απαιτείται για την επίλυση του φορέα, για τον υπολογισμό δηλαδή των άγνωστων μετακινήσεων.

Βήμα 3. Υπολογισμός των απαιτούμενων ρομών στις καταστάσεις "ξ_i=1" (i=1,2)

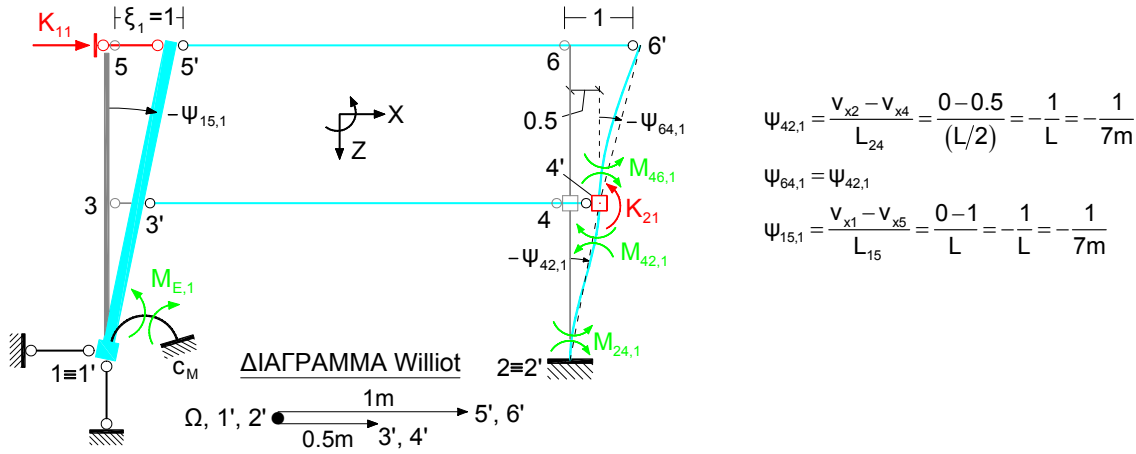
- Κατάσταση "ξ₁=1"

Λόγω της οριζόντιας μετατόπισης του κόμβου 5, το στοιχείο 1-3-5 στρέφεται περί τον ελαστικώς πακτωμένο κόμβο 1 ως απολύτως στερεό σώμα (Σχ. 8.3). Η ατένεια των ράβδων 3-4 και 5-6 αναγκάζει τους «απέναντι» κόμβους 4 και 6 να μετατοπιστούν οριζοντίως ακριβώς όσο και οι κόμβοι 3 και 5 αντιστοίχως.

Οι καμπτικές ροπές στα άκρα των στύλων 2-4 και 4-6, μπορούν να υπολογιστούν άμεσα με τη βοήθεια πινάκων αμφίπακτων και μονόπακτων δοκών (βλ. Πίνακες 1 και 2) σε συνδυασμό με τα δεδομένα του σχήματος 8.3:

$$M_{24,1} = M_{42,1} = -6 \cdot \left(\frac{EI_{24}}{L_{24}} \right) \cdot \psi_{42,1} = -6 \cdot \left(\frac{10^5}{7/2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{7} \right) = 24489.8 \text{ kNm/m}$$

$$M_{46,1} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{46}}{L_{46}} \right) \cdot \psi_{64,1} = -3 \cdot \left(\frac{10^5}{7/2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{7} \right) = 12244.9 \text{ kNm/m}$$



Σχήμα 8.3 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση “ξ₁=1”.

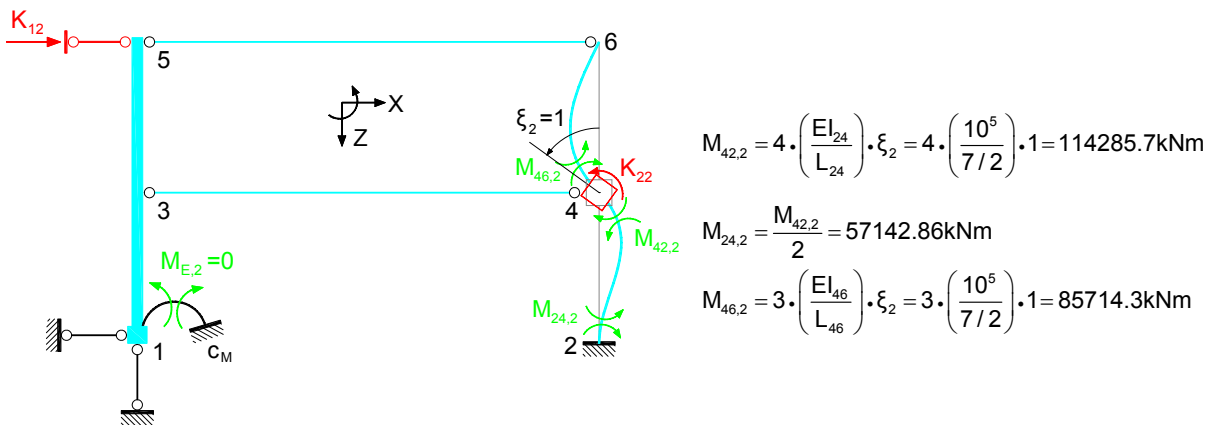
Η ροπή του στροφικού ελατηρίου M_{E,1} λόγω της στροφής του στερεού στοιχείου 1-5, ισούται με:

$$M_{E,1} = -c_M \cdot \psi_{15,1} = -c_M \cdot \left(-\frac{1}{L} \right) = 1428.6 \text{ kNm/m}$$

Η αξονική δύναμη N_{34,1}, η οποία εύκολα μπορεί να υπολογιστεί από την ισορροπία οριζοντίων δυνάμεων στον κόμβο 4, προκαλεί ένταση στο άκαμπτο στοιχείο 1-3-5, η οποία όμως δεν μπορεί να υπολογιστεί για τους λόγους που αναφέρθηκαν και προηγουμένως στην κατάσταση "0". Εντούτοις, όπως και εκεί, η ένταση του άκαμπτου στοιχείου 1-3-5 δεν απαιτείται για τον υπολογισμό των άγνωστων μετακινήσεων του φορέα.

- Κατάσταση “ξ₂=1”

Όπως και για την κατάσταση “ξ₁=1”, οι καμπτικές ροπές στα άκρα των δοκών 4-2 και 6-4 μπορούν να υπολογιστούν άμεσα με τη βοήθεια των πινάκων αμφίπακτων και μονόπακτων δοκών σε συνδυασμό με τα δεδομένα του σχήματος 8.4.



Σχήμα 8.4 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση “ξ₂=1”.

Στην υπό θεώρηση κατάσταση “ξ₂=1” ο κόμβος 1 παραμένει άστρεπτος και επομένως η ροπή M_{E,2} στο στροφικό ελατήριο είναι μηδενική: M_{E,2}=0.

Σημείωση:

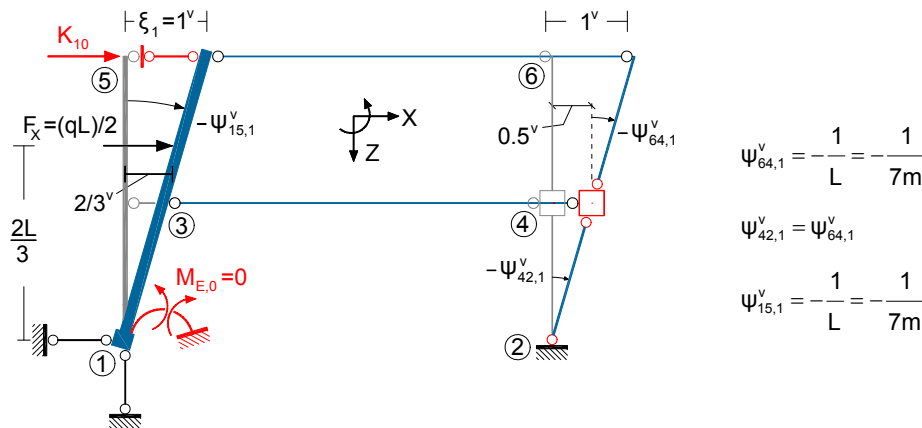
Στην κατάσταση “ξ₂=1” αναπτύσσεται στη ράβδο 3-4 αξονική δύναμη N_{34,2}, η οποία μπορεί να υπολογιστεί από τη συνθήκη ισορροπίας οριζοντίων δυνάμεων στον κόμβο 2. Στη συνθήκη αυτή, υπεισέρχονται οι τέμνουσες δυνάμεις Q_{42,2}

και $Q_{45,2}$, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τις γνωστές ροπές των δύο στύλων. Η αξονική δύναμη $N_{34,2}$ της ράβδου 3-4 δρα στον κόμβο 2 του απολύτως στερεού στοιχείου 1-3-5, στο οποίο αναπτύσσεται έτσι σχετική καμπτική ένταση. Το δεσμευμένο στους ακραίους κόμβους του 1 και 5 στοιχείο παραμένει βέβαια απαραμόρφωτο (εξ ορισμού) και αμετακίνητο, και επομένως ο κόμβος 1 παραμένει άστρεπτος και το στροφικό ελατήριο άτονο.

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας K_{ij} και φόρτισης K_{i0} ($i, j=1, 2$)

Οι συντελεστές στιβαρότητας και φόρτισης θα υπολογιστούν με εφαρμογή της ΑΔΕ, κάνοντας χρήση των ήδη υπολογισθεισών ροπών στα άκρα των στοιχείων και στο στροφικό ελατήριο στις καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ ". Έτσι, για τον υπολογισμό των αντιδράσεων K_{1n} ($n = 0, 1, 2$) υποβάλλουμε το ΓΚΣ σε μία δυνατή μετακίνηση $\xi_1=1^v$ και καταγράφουμε τα παραγόμενα δυνατά έργα των εντασιακών μεγεθών των «πραγματικών» καταστάσεων "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ ". Οι τρεις νοητές καταστάσεις απεικονίζονται στα σχήματα 8.5-1 έως 8.5-3.

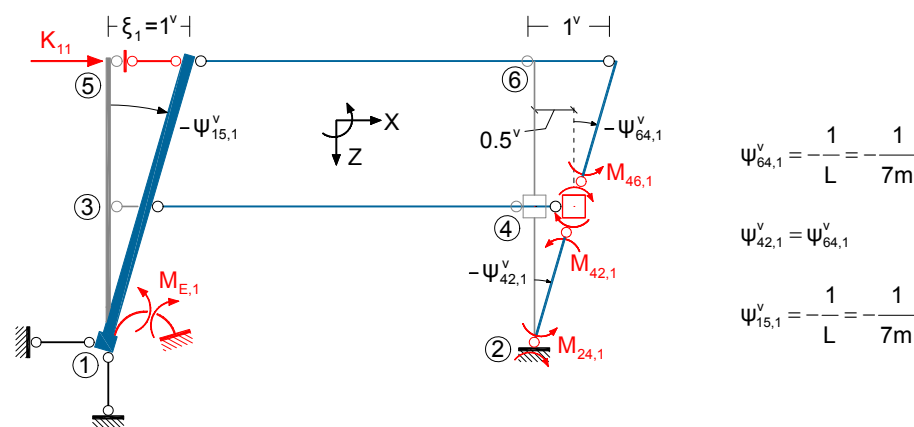
- Κατάσταση δυνατής μετακίνησης " $\xi_1=1^v$ " για τις καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ "



Σημ.: Για την αντικατάσταση του τριγωνικού συνεχούς φορτίου q με το μοναχικό φορτίο F_x βλ. [2], σχετική σημείωση στο Σχ. 3.3-27.

$$W_e^v = K_{10} \cdot 1^v + F_x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v = 0 \Rightarrow K_{10} \cdot 1^v + \left(\frac{q \cdot L}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^v = 0 \Rightarrow K_{10} = -\frac{q \cdot L}{3} = -23.33 \text{ kNm}$$

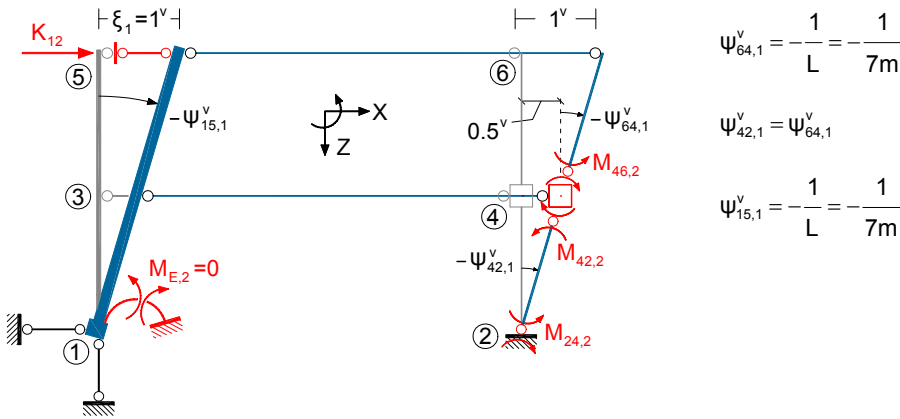
Σχήμα 8.5-1 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση "0" για τον υπολογισμό του K_{10} .



$$W_e^v = K_{11} \cdot 1^v - (M_{24,1} + M_{42,1}) \cdot (-\psi_{42,1}^v) - M_{46,1} \cdot (-\psi_{64,1}^v) - M_{E,1} \cdot (-\psi_{15,1}^v) = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} = (24489.8 + 24489.8) \cdot \frac{1^v}{7} + 12244.9 \cdot \frac{1^v}{7} + 1428.6 \cdot \frac{1^v}{7} \Rightarrow K_{11} = 8950.44 \text{ kN/m}$$

Σχήμα 8.5-2 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση " $\xi_1=1$ " για τον υπολογισμό του K_{11} .



$$\psi_{64,1}^v = -\frac{1}{L} = -\frac{1}{7m}$$

$$\psi_{42,1}^v = \psi_{64,1}^v$$

$$\psi_{15,1}^v = -\frac{1}{L} = -\frac{1}{7m}$$

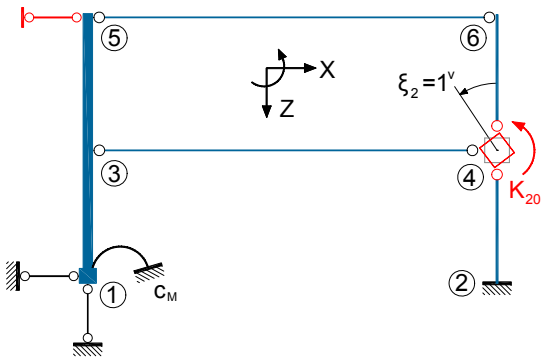
$$W_e^v = K_{12} \cdot 1^v - (M_{24,2} + M_{42,2}) \cdot (-\psi_{42,1}^v) - M_{46,2} \cdot (-\psi_{64,1}^v) = 0$$

$$\Rightarrow K_{12} = (57142.86 + 114285.7) \cdot \frac{1^v}{7} + 85714.29 \cdot \frac{1^v}{7} = 0 \Rightarrow K_{12} = 36734.7 \text{ kN}$$

Σχήμα 8.5-3 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση " $\xi_2=1$ " για τον υπολογισμό του K_{12} .

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τις αντιδράσεις (ροπές) K_{2n} ($n = 0, 1, 2$) που αναπτύσσονται στον κόμβο 4, όπου έχουμε εισάγει την υπεράριθμη μετακίνηση (στροφή) ξ_2 . Υποβάλλουμε, δηλαδή, τον κόμβο 4 του ΓΚΣ σε μία δυνατή στροφή $\xi_2=1^v$ και καταγράφουμε τα παραγόμενα επί αυτής δυνατά έργα των εντασιακών μεγεθών (ροπών) των «πραγματικών» καταστάσεων "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ ". Οι τρεις νοητές καταστάσεις απεικονίζονται στα σχήματα 8.6-1 έως 8.6-3.

- Κατάσταση δυνατής μετακίνησης " $\xi_2=1^v$ " για τις καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ "



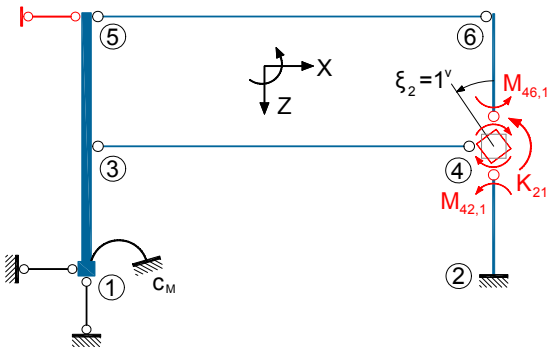
Δυνατά έργα της εντασιακής κατάστασης "0" κατά την δυνατή μετακίνηση " $\xi_2=1^v$ ":

$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{21} \cdot 1^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{21} = 0$$

Σχήμα 8.6-1 Δυνατή μετακίνηση $\xi_2=1^v$ για τον υπολογισμό του K_{20} .



Δυνατά έργα της εντασιακής κατάστασης " $\xi_1=1$ " κατά την δυνατή μετακίνηση " $\xi_2=1^v$ ":

$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{21} \cdot 1^v - (M_{42,1} + M_{46,1}) \cdot 1^v = 0 \Rightarrow$$

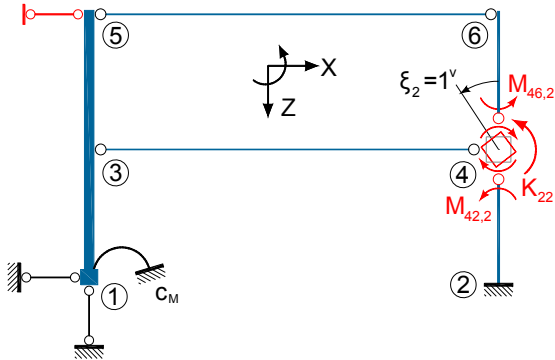
$$K_{21} - (24489.8 + 12244.9) = 0$$

$$\Rightarrow K_{21} = 36734.7 \text{ kNm/m}$$

Σχήμα 8.6-2 Δυνατή μετακίνηση $\xi_2=1^v$ για τον υπολογισμό του K_{21} .

Παρατήρηση σχετικά με τις μονάδες μέτρησης των συντελεστών στιβαρότητας K_{12} και K_{21} :

Οι συντελεστές στιβαρότητας K_{12} και K_{21} προκύπτουν αριθμητικά ίσοι, ικανοποιώντας, έτσι, την 2^η πρόταση αμοιβαιότητας των Maxwell-Betti. Εντούτοις, οι μονάδες μέτρησής τους είναι αναγκαστικά διαφορετικές, αφού η K_{12} είναι μία δύναμη λόγω επιβαλλόμενης μοναδιαίας (αδιάστατης) στροφής $\xi_2 = \varphi_4 = 1[-]$, ενώ η K_{21} είναι μία ροπή λόγω επιβαλλόμενης μοναδιαίας (αδιάστατης) μετατόπισης $\xi_1 = u_5 = 1[-]$. Επομένως, η μεν K_{12} μετριέται σε [kN/rad] ή κατ' απλούστευση (βλ. σχετική παρατήρηση στο βήμα 3 της Άσκησης 1) σε [kN], ενώ η K_{21} μετριέται σε [kNm/m].



Δυνατά έργα της εντασιακής κατάστασης " $\xi_2=1$ " κατά την δυνατή μετακίνηση " $\xi_2=1$ ":

$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{22} \cdot 1^v - (M_{42,2} + M_{46,2}) \cdot 1^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{22} - (114285.7 + 85714.3) = 0$$

$$\Rightarrow K_{22} = 200000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 8.6-3 Δυνατή μετακίνηση $\xi_2=1^v$ για τον υπολογισμό του K_{22} .

Βήμα 5. Κατάστροση του συστήματος εξισώσεων και υπολογισμός των ξ_i

Οι εξισώσεις ισορροπίας εκφράζουν τη συνθήκη μηδενισμού των αντιδράσεων παγίωσης K_1 και πάκτωσης K_2 στον δεδομένο φορέα. Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας και τα προηγηθέντα αριθμητικά αποτελέσματα, για τους συντελεστές K_{ij} και K_{i0} , έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} K_{11} \cdot \xi_1 + K_{12} \cdot \xi_2 + K_{10} &= 0 \\ K_{21} \cdot \xi_1 + K_{22} \cdot \xi_2 + K_{20} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 8950.44 \cdot \xi_1 + 36734.7 \cdot \xi_2 - 23.33 &= 0 \\ 36734.7 \cdot \xi_1 + 200000 \cdot \xi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0.01059 \text{ m} \\ \xi_2 &= -1.945 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{aligned} \right.$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Ροπές κάμψης

Ο υπολογισμός των τελικών καμπτικών ροπών γίνεται με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας:

$$M_{ij} = M_{ij,0} + M_{ij,1} \cdot \xi_1 + M_{ij,2} \cdot \xi_2 :$$

$$M_{24} = 24489.8 \cdot 0.01059 + 57142.86 \cdot (-1.945 \cdot 10^{-3}) = 148.2 \text{ kNm}$$

$$M_{42} = 24489.8 \cdot 0.01059 + 114285.7 \cdot (-1.945 \cdot 10^{-3}) = 37.05 \text{ kNm}$$

$$M_{46} = 12244.9 \cdot 0.01059 + 85714.3 \cdot (-1.945 \cdot 10^{-3}) = -37.05 \text{ kNm}$$

$$M_E = -M_{13} = (-1428.6) \cdot 0.01059 = -15.13 \text{ kNm}$$

Για τη σχεδίαση των διαγραμμάτων απαιτείται προσήμανση βάσει της ίνας αναφοράς:

$$M_{24} = 148.2 \text{ kNm} \quad M_{42} = -37.05 \text{ kNm} \quad M_{46} = -37.05 \text{ kNm} \quad M_{13} = -15.13 \text{ kNm}$$

Τέμνουσες δυνάμεις

Οι τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται κατά τα γνωστά από τις καμπτικές ροπές:

$$Q_{24} = Q_{42} = 52.93 \text{ kNm} \quad Q_{46} = Q_{64} = -10.60 \text{ kNm}$$

Αξονικές δυνάμεις

Επειδή οι τέμνουσες δυνάμεις των δύο ράβδων 3-4 και 5-6 είναι (ελλείψει εγκάρσιας εξωτερικής φόρτισής τους) μηδενικές, οι αξονικές δυνάμεις των κατακορύφων στοιχείων (στα οποία δεν ασκούνται εξωτερικά κατακόρυφα αξονικά φορτία) προκύπτουν επίσης μηδενικές. Αξονικές δυνάμεις αναπτύσσονται μόνο στις

ράβδους 3-4 και 5-6. Για τον υπολογισμό των N_{34} και N_{56} , καταστρώνονται οι εξισώσεις ισορροπίας των οριζοντίων δυνάμεων στους κόμβους 4 και 6:

$$\text{Κόμβος 4: } \sum F_x = 0 \Rightarrow Q_{46} - Q_{42} - N_{43} = 0 \Rightarrow N_{43} = Q_{46} - Q_{42} = -10.60 - 52.93 \Rightarrow N_{43} = -63.53 \text{ kN}$$

$$\text{Κόμβος 6: } \sum F_x = 0 \Rightarrow Q_{64} + N_{56} = 0 \Rightarrow N_{56} = -Q_{64} = 10.60 \Rightarrow N_{56} = 10.60 \text{ kN}$$

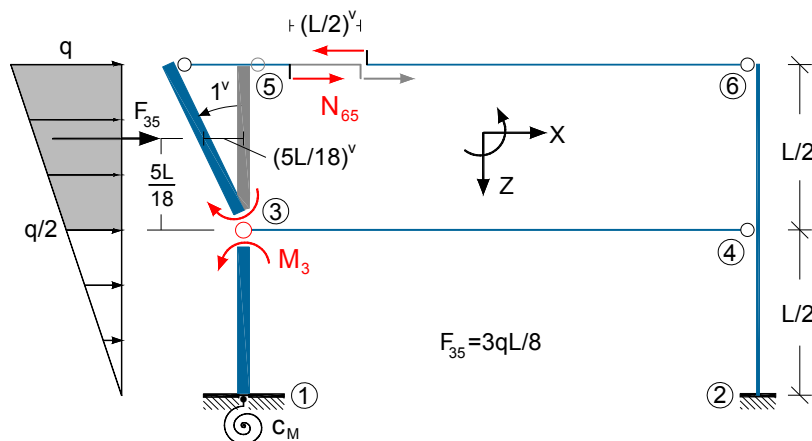
Ένταση του απολύτως στερεού στοιχείου 1-3-5

Με γνωστά πλέον τα εντασιακά μεγέθη των άλλων στοιχείων, ο υπολογισμός των M , Q , N του στοιχείου 1-3-5 μπορεί να γίνει πολύ απλά με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας. Αποσπώντας το στοιχείο 1-3-5 από τον υπόλοιπο φορέα, έχουμε έναν ελαστικώς πακτωμένο πρόβολο (δηλαδή έναν ισοστατικό φορέα), ο οποίος φορτίζεται από αριστερά με το δεδομένο τριγωνικό φορτίο q και από δεξιά με τις δύο υπολογισθείσες αξονικές δυνάμεις N_{34} και N_{56} . Ο υπολογισμός των φορτίων διατομής του έτσι φορτιζόμενου ισοστατικού αυτού φορέα είναι στοιχειώδης και επαφίεται στον αναγνώστη.

Τονίζεται ότι ο υπολογισμός της έντασης άκαμπτων ή/και άτμητων ή/και ατενών δομικών στοιχείων δεν είναι γενικά δυνατός, εκτός εάν αυτά, αποσπώμενα από τον αρχικό φορέα στον οποίο ανήκουν, συνιστούν (όπως στην προκειμένη περίπτωση) ισοστατικούς φορείς με γνωστά φορτία.

Ακολουθώντας, για λόγους άσκησης, θα υπολογιστούν τα M , Q , N του στοιχείου 1-3-5 με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων. Για τον υπολογισμό της ροπής M_3 γίνονται οι εξής ενέργειες:

- (1) Εισάγεται μια *καμπτική άρθρωση* στον κόμβο 3 (Σχ. 8.7). Ταυτόχρονα, προκειμένου να διατηρηθεί η πραγματική εντασιακή κατάσταση του φορέα, προσάγεται στο σημείο αυτό η ζητούμενη (άγνωστη ακόμα) πραγματική ροπή M_3 .
- (2) Ακολουθώντας, καταλύεται η συνέχεια της ράβδου 5-6 (δηλαδή εισάγεται σε αυτήν μία αξονική άρθρωση) και στο σημείο της κατάλυσης προσάγεται η υφιστάμενη εκεί (γνωστή ήδη) πραγματική αξονική δύναμη N_{56} . Ο έτσι προκύπτων κινηματικός (χαλαρός) φορέας, (ο οποίος όμως λόγω προσαγωγής των υφισταμένων εσωτερικών φορτίων διατομής στα σημεία κατάλυσης της συνέχειας έχει την ίδια ακριβώς ένταση όπως ο δεδομένος φορέας), υποβάλλεται σε μία κατάλληλη δυνατή μετακίνηση. Ως δυνατή μετακίνηση επιλέγεται η μοναδιαία στροφή του τμήματος 3-5, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 8.7.



Σχήμα 8.7 Υπολογισμός της ροπής M_3 με εφαρμογή της ΑΔΕ.

Σημείωση:

Στο σχήμα 8.7 η αρχική θέση του στοιχείου 3-5 δίνεται σε γκρι, ενώ η θέση του μετά τη δυνατή μετακίνηση σε **μπλε** χρώμα. Παρομοίως: Η αρχική θέση του αριστερού σκέλους της αξονικής δύναμης N_{65} δίνεται σε γκρι, ενώ η θέση του μετά τη δυνατή μετακίνηση σε **κόκκινο** χρώμα. Το δεξιό σκέλος της N_{65} δεν υφίσταται δυνατή μετατόπιση.

Εφαρμόζοντας την ΑΔΕ για τη δυνατή αυτή μετακίνηση παίρνουμε (Σημ.: Το δυνατό έργο του τραπεζοειδούς συνεχούς φορτίου επί των δυνατών μετατοπίσεων του στοιχείου 3-5 είναι ίσο με το δυνατό έργο της συνισταμένης F_{35} επί τη δυνατή μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της):

$$W_e^v = 0 \Rightarrow -M_3 \cdot 1^v - F_{35} \cdot \left(\frac{5L}{18}\right)^v - N_{65} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^v = 0 \Rightarrow -M_3 - \left(\frac{3qL}{8}\right) \cdot \left(\frac{5L}{18}\right) - N_{65} \cdot \left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

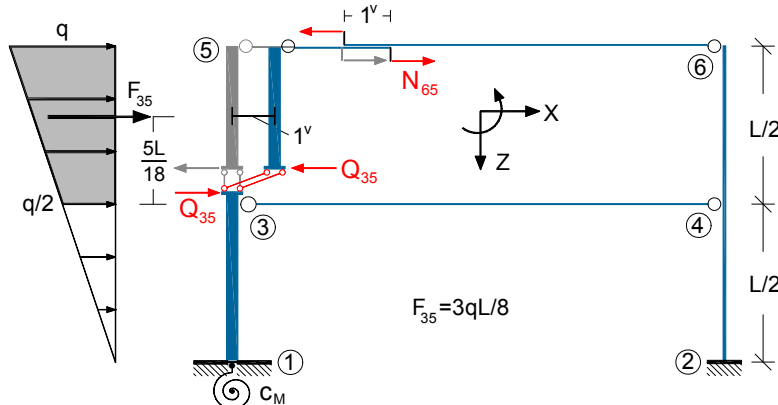
$$-M_3 - \left(\frac{3 \cdot 10 \cdot 7}{8}\right) \cdot \left(\frac{5 \cdot 7}{18}\right) - 10.60 \cdot \left(\frac{7}{2}\right) = 0 \Rightarrow M_3 = -88.14 \text{ kNm}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να υπολογιστεί και η τέμνουσα Q_{35} . Για τον σκοπό αυτό γίνονται οι εξής ενέργειες:

- (1) Εισάγεται μία *διατμητική άρθρωση* στον κόμβο 3. Ταυτόχρονα, προκειμένου να διατηρηθεί η πραγματική εντασιακή κατάσταση του φορέα, προσάγεται σε αυτήν η ζητούμενη (άγνωστη ακόμα) πραγματική τέμνουσα δύναμη Q_{35} .
- (2) Ακολούθως, καταλύεται η συνέχεια της ράβδου 5-6 (δηλαδή εισάγεται σε αυτήν μία αξονική άρθρωση) και στο σημείο της κατάλυσης προσάγεται η υφιστάμενη εκεί (γνωστή ήδη) πραγματική αξονική δύναμη N_{56} . Ο έτσι προκύπτων κινηματικός (χαλαρός) φορέας, (ο οποίος όμως λόγω προσαγωγής των υφισταμένων εσωτερικών φορτίων διατομής στα σημεία κατάλυσης της συνέχειας έχει την ίδια ακριβώς ένταση όπως ο δεδομένος φορέας), υποβάλλεται σε μία δυνατή μετακίνηση. Ως δυνατή μετακίνηση επιλέγεται η μοναδιαία οριζόντια μετατόπιση του τμήματος 3-5, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.8.

Σημείωση:

Στο σχήμα 8.8 η αρχική θέση του στοιχείου 3-5 δίνεται σε γκρι, ενώ η θέση του μετά τη δυνατή μετακίνηση σε **μπλε** χρώμα. Παρομοίως: Η αρχική θέση του άνω σκέλους της τέμνουσας δύναμης Q_{35} δίνεται σε γκρι, ενώ η θέση του μετά τη δυνατή μετακίνηση σε **κόκκινο** χρώμα. Το κάτω σκέλος της Q_{35} δεν εκτελεί δυνατή μετατόπιση.



Σχήμα 8.8 Υπολογισμός της τέμνουσας Q_{35} με εφαρμογή της ΑΔΕ.

Εφαρμόζοντας τη ΑΔΕ για την δυνατή αυτή μετακίνηση παίρνουμε:

$$W_e^v = 0 \Rightarrow -Q_{35} \cdot 1^v + F_{35} \cdot 1^v + N_{65} \cdot 1^v = 0$$

$$\Rightarrow -Q_{35} + \left(\frac{3 \cdot q \cdot L}{8}\right) + N_{65} = 0$$

$$\Rightarrow -Q_{35} + \left(\frac{3 \cdot 10 \cdot 7}{8}\right) + 10.60 = 0$$

$$\Rightarrow Q_{35} = 36.85 \text{ kN}$$

Είναι εμφανής η ισοδυναμία της παραπάνω εξίσωσης με την εξίσωση ισορροπίας των οριζοντίων δυνάμεων που δρουν επί του τμήματος 3-5.

Με γνωστή την Q_{35} , η τέμνουσα Q_{31} μπορεί να υπολογιστεί από την ισορροπία των οριζοντίων δυνάμεων στον κόμβο 3 (πρόσημα τεμνουσών βάσει ίνας αναφοράς):

$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow Q_{35} - Q_{31} + N_{43} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{31} = N_{43} + Q_{35} = -63.53 + 36.85$$

$$\Rightarrow Q_{31} = -26.68 \text{ kN}$$

Τέλος, η τέμνουσα Q_{13} στη βάση του στοιχείου 1-3 μπορεί να υπολογιστεί εύκολα από την ισορροπία των οριζοντίων δυνάμεων του τμήματος 1-3 (πρόσημα τεμνουσών βάσει ίνας αναφοράς):

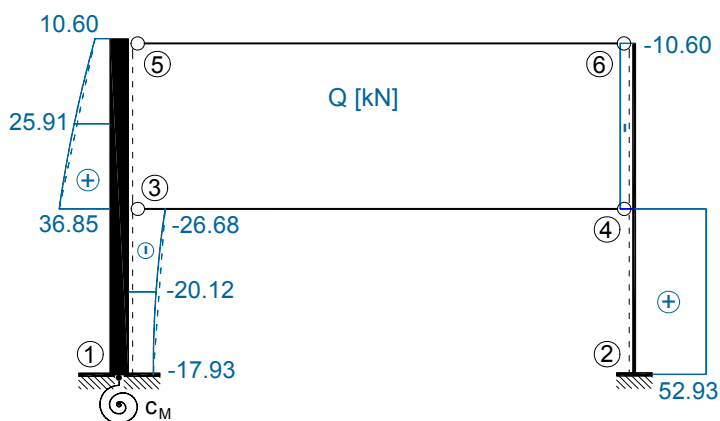
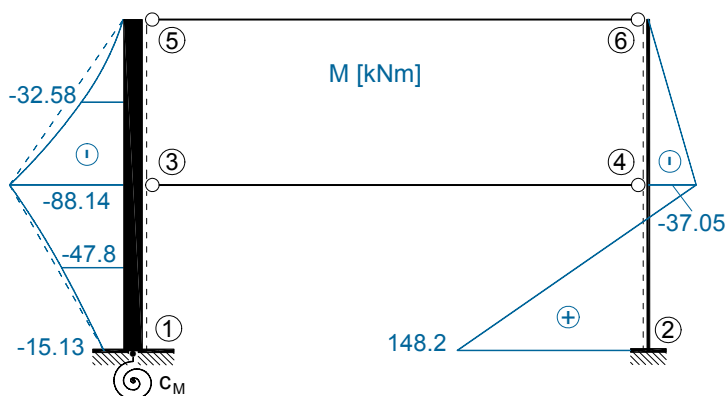
$$\sum F_x = 0$$

$$\Rightarrow Q_{35} + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{q}{2}\right) \cdot \left(\frac{L}{2}\right) - Q_{31} = 0$$

$$\Rightarrow Q_{13} = \frac{qL}{8} + Q_{31} = \frac{10.7}{8} - 26.68$$

$$\Rightarrow Q_{13} = -17.93 \text{ kN}$$

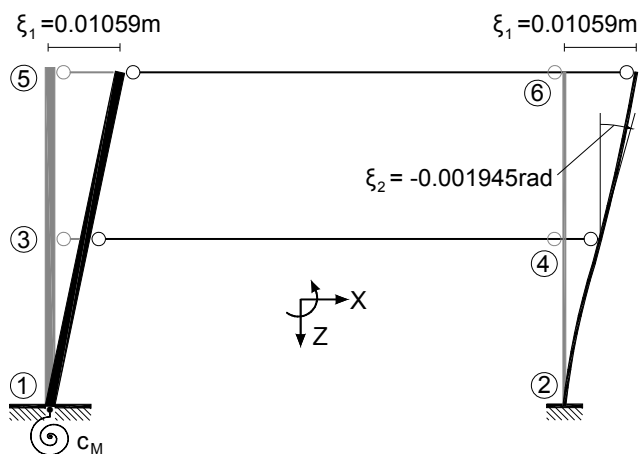
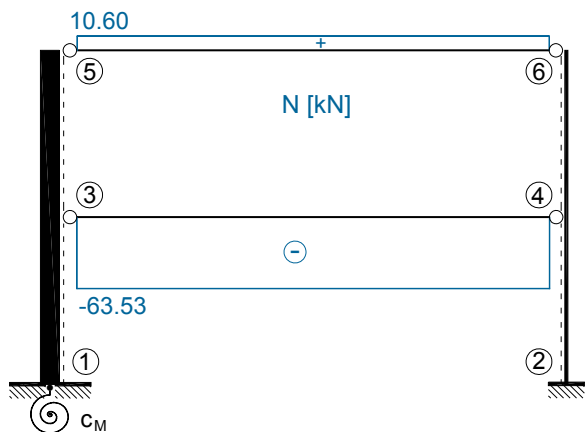
Τα διαγράμματα των μεγεθών έντασης M , Q , και N , καθώς και η ελαστική γραμμή του φορέα δίνονται στα παρακάτω σχήματα 8.9-1 και 8.9-2.



Σχήμα 8.9-1 Τα διαγράμματα M και Q του φορέα.

Παρατήρηση:

Λόγω της τριγωνικής φόρτισης, το διάγραμμα των ροπών είναι καμπύλη τρίτου βαθμού που στρέφει τα κοίλα προς τα αριστερά (κατά την έννοια του εξωτερικού φορτίου). Το διάγραμμα των τεμνουσών είναι καμπύλη δευτέρου βαθμού που στρέφει τα κοίλα προς τα δεξιά (ενάντια προς το εξωτερικό φορτίο). Η κλίση της εφαπτομένης στο διάγραμμα των τεμνουσών (δηλαδή η πρώτη παράγωγος) έχει στο σημείο 1 μηδενική τιμή, διότι στο συγκεκριμένο σημείο το εξωτερικό φορτίο (που είναι η πρώτη παράγωγος του διαγράμματος των τεμνουσών) έχει, επίσης, μηδενική τιμή.



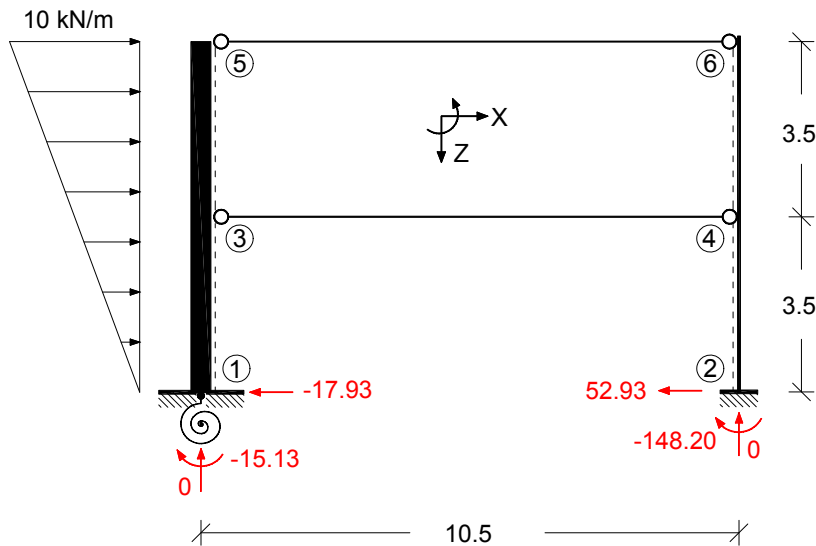
Σχήμα 8.9-2 Το διάγραμμα N και η ελαστική γραμμή του φορέα.

Παρατήρηση:

Το σημείο αλλαγής της καμπυλότητας της ελαστικής γραμμής του στύλου 2-4-6 είναι το σημείο μηδενισμού των ροπών του στύλου αυτού.

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολούθως διενεργούνται τρεις ισοροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (Σχ. 8.10).



$$\sum F_x = \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7\right) + 17.93 - 52.93 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0 + 0 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -15.13 - 148.20 + \left(\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 7\right) = 0.003 \approx 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 8.10 Ισοροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Οι τρεις παραπάνω συνθήκες ισοροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισοροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφένται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 3

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
- [2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙ: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Κεφάλαιο 4

Συγκριτική επίλυση φορέων με και χωρίς ατένεια

Σύνοψη

Η άσκηση 9, που περιέχεται στο κεφάλαιο αυτό, αφορά στον υπολογισμό ενός δίστυλου κινητού πλαισίου για δύο διαφορετικές φορτίσεις και στοχεύει -μεταξύ άλλων- στη διερεύνηση της επιρροής της ατένειας/δυστένειας επί των αποτελεσμάτων της επίλυσης. Υπενθυμίζεται ότι η παραδοχή της ατένειας, με την οποία επιτυγχάνεται μείωση των αγνώστων μετακινήσεων του προς επίλυση φορέα, είναι ρεαλιστική για δομικά στοιχεία, τα οποία υπό την αξονική δύναμη που αναπτύσσεται σε αυτά, εμφανίζουν αμελητέα μεταβολή του μήκους τους. Τέτοια στοιχεία μπορεί να είναι π.χ. δοκοί και στύλοι πλαισίων σε συνήθεις κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα. Εντούτοις, δεδομένου ότι στην πράξη όλοι οι υπολογισμοί μιας στατικής μελέτης διενεργούνται σήμερα με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή και κατάλληλου λογισμικού, η μείωση των αγνώστων μέσω της παραδοχής της ατένειας δεν είναι απαραίτητη. Το πλαίσιο της άσκησης 9 επιλύεται τόσο υπό την παραδοχή της ατένειας (3 άγνωστες μετακινήσεις) όσο και χωρίς την παραδοχή αυτή (6 άγνωστες μετακινήσεις). Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

Προαπαιτούμενη γνώση

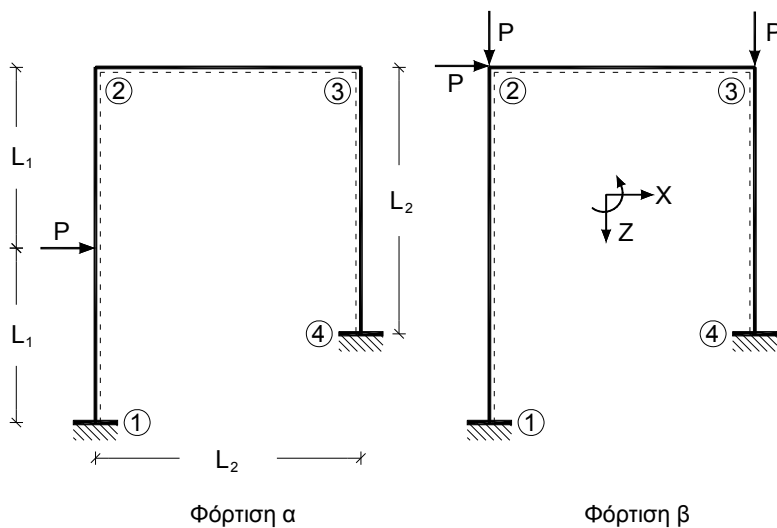
Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων (βλ. π.χ. [2]-κεφ.3) και οπωσδήποτε η μελέτη των ασκήσεων των προηγούμενων κεφαλαίων 1, 2 και 3. Σε κάθε περίπτωση απαιτείται καλή γνώση της Στατικής των ισοστατικών φορέων καθώς και επαρκής εξοικείωση με τη Μέθοδο των υπεραριθμών δυνάμεων για υπερστατικούς φορείς (βλ. π.χ. [1] και [2]-κεφ.2, καθώς και λοιπή σχετική βιβλιογραφία της παραγράφου Ε7).

Άσκηση 9

Εκφώνηση

Για τον φορέα του σχήματος 9.0, ο οποίος προκύπτει από τον φορέα της προηγούμενης Άσκησης 6 με κατάργηση της άρθρωσης στον κόμβο 3, ζητούνται:

1. Επίλυση με τη ΜΜ υπό την παραδοχή της ατένειας για τις δύο σημειούμενες περιπτώσεις φόρτισης α και β, και σχεδίαση των διαγραμμάτων Μ και Q.
2. Επίλυση με τη ΜΜ για τη φόρτιση β χωρίς την παραδοχή της ατένειας και σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της ανάλυσης υπό την παραδοχή της ατένειας.



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία

$L_1=4.00\text{m}$

$L_2=6.00\text{m}$

Φορτίσεις α και β

$P=40\text{kN}$

Δοκοί/Στύλοι

$EI_{12}=EI_{34}=10^5\text{ kNm}^2$

$EI_{23}=6\cdot 10^4\text{ kNm}^2$

$GA_s \rightarrow \infty$

Ατενής φορέας:

$EA \rightarrow \infty$

Ευτενής φορέας:

$EA_{12}=EA_{34}=1.85\cdot 10^6\text{ kN}$

$EA_{23}=8.25\cdot 10^5\text{ kN}$

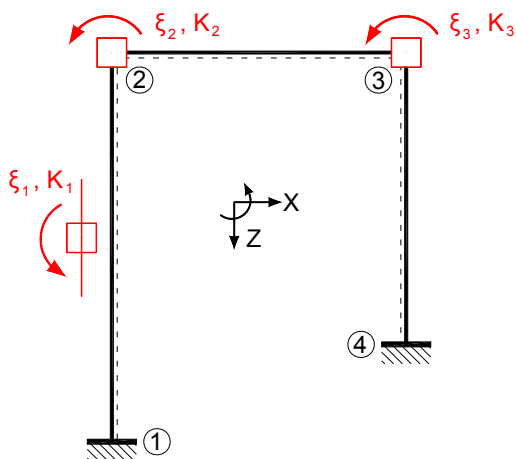
Σχήμα 9.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση

Λύση

1. Επίλυση του ατενούς φορέα με τη ΜΜ για τις φορτίσεις α και β

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Ο φορέας της παρούσας άσκησης προκύπτει από τον φορέα της Άσκησης 6 με κατάργηση της άρθρωσης στον κόμβο 3. Η αλλαγή αυτή συνεπάγεται ένα πρόσθετο άγνωστο μέγεθος μετακίνησης: τη στροφή του κόμβου 3. Άρα, τα άγνωστα γεωμετρικά μεγέθη είναι η στροφή ψ_{12} της χορδής της δοκού 1-2 και οι στροφές φ_2 και φ_3 των κόμβων 2 και 3 αντίστοιχα. Το ΓΚΣ με $\xi_1=\psi_{12}$, $\xi_2=\varphi_2$ και $\xi_3=\varphi_3$ δίνεται στο σχήμα 9.1.



Σχήμα 9.1 Το ΓΚΣ του δεδομένου φορέα.

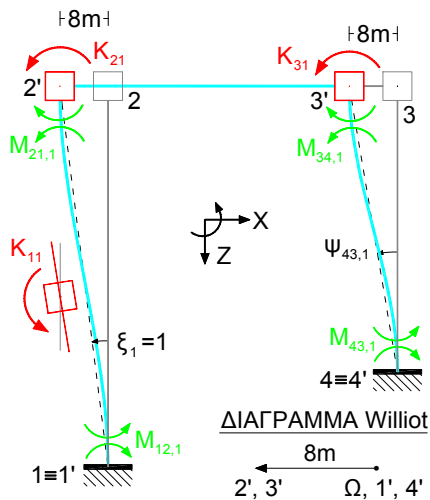
Ο δεδομένος φορέας είναι 3 φορές γεωμετρικά αόριστος. Για τον υπολογισμό των 3 αγνώστων μετακινήσεων ξ_i ($i = 1, 2, 3$) απαιτείται για κάθε μία περίπτωση φόρτισης η κατάστρωση και επίλυση ενός συστήματος τριών εξισώσεων, το οποίο έχει τη μορφή:

$$[K_{ij}] \cdot [\xi_j] + \begin{Bmatrix} [K_{i0}^{(a)}] \\ [K_{i0}^{(b)}] \end{Bmatrix} = [0]$$

Το μητρώο στιβαρότητας K_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), που πρέπει να υπολογίσουμε, έχει διαστάσεις 3×3 , είναι συμμετρικό ($K_{ij} = K_{ji}$) και είναι, βεβαίως, το ίδιο και για τις δύο περιπτώσεις φόρτισης. Αντίθετα, κάθε περίπτωση φόρτισης (α και β) έχει το δικό της διάνυσμα φορτίου ($K_{i0}^{(a)}$ και $K_{i0}^{(b)}$ αντίστοιχα) με διαστάσεις 3×1 το καθένα.

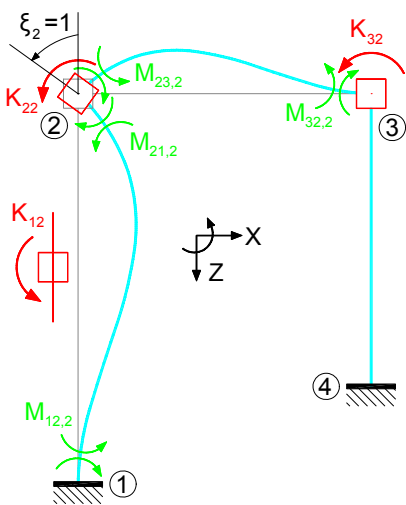
Ακολουθώντας, αλλάζοντας τη συνήθη μέχρι τώρα σειρά των βημάτων επίλυσης, υπολογίζονται πρώτα το μητρώο στιβαρότητας K_{ij} (βλ. Βήμα 2 και Βήμα 3), κατόπιν τα δύο μητρώα φορτίου $K_{i0}^{(a)}$ και $K_{i0}^{(b)}$ και, τέλος, για κάθε ένα από αυτά, οι τιμές των υπεραιθμών και τα τελικά εντασιακά μεγέθη (βλ. Βήματα 4-5-6). Ως τελευταίο βήμα διενεργούνται, όπως πάντα, οι έλεγχοι των αποτελεσμάτων (Βήμα 7).

Βήμα 2. Υπολογισμός μεγεθών έντασης/μετακίνησης των καταστάσεων " $\xi_i=1$ " ($i=1,2,3$)



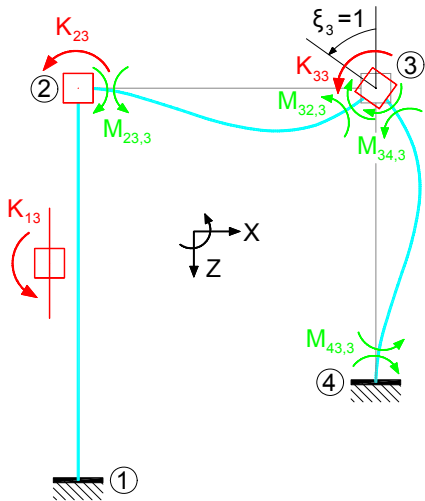
$$\begin{aligned} \psi_{12,1} &= \xi_1 = 1 \\ \psi_{34,1} &= \frac{v_{x4} - v_{x3}}{L_{34}} = \frac{0 - (-8)}{6} = \frac{4}{3} \\ M_{12,1} &= M_{21,1} = -6 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{12,1} = -6 \cdot \left(\frac{10^5}{8} \right) \cdot 1 = -75000 \text{ kNm} \\ M_{43,1} &= M_{34,1} = -6 \cdot \left(\frac{EI_{34}}{L_{34}} \right) \cdot \psi_{34,1} = -6 \cdot \left(\frac{10^5}{6} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \right) = -133333.33 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Σχήμα 9.2-1 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_1=1$ ".



$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \xi_2 = 1 \\ M_{12,2} &= 2 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{8} \right) \cdot 1 = 25000 \text{ kNm} \\ M_{21,2} &= 4 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 50000 \text{ kNm} \\ M_{23,2} &= 4 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 4 \cdot \left(\frac{6 \cdot 10^4}{6} \right) \cdot 1 = 40000 \text{ kNm} \\ M_{32,2} &= 2 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 20000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Σχήμα 9.2-2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_2=1$ ".

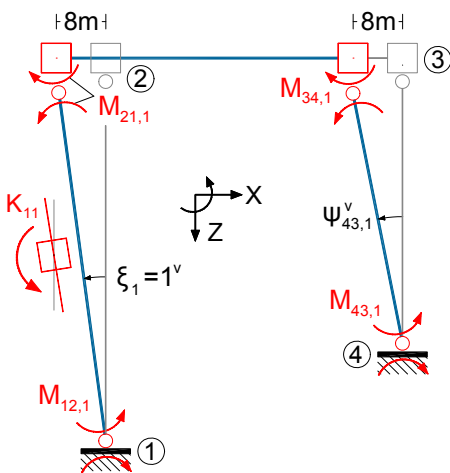


$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \xi_3 = 1 \\ M_{43,3} &= 2 \cdot \left(\frac{EI_{34}}{L_{34}} \right) \cdot \varphi_3 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{6} \right) \cdot 1 = 33333.33 \text{ kNm} \\ M_{34,3} &= 4 \cdot \left(\frac{EI_{34}}{L_{34}} \right) \cdot \varphi_3 = 66666.66 \text{ kNm} \\ M_{23,3} &= 2 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_3 = 2 \cdot \left(\frac{6 \cdot 10^4}{6} \right) \cdot 1 = 20000 \text{ kNm} \\ M_{32,3} &= 4 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_3 = 40000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Σχήμα 9.2-3 Ένταση και παραμόρφωση του ΓΚΣ στην κατάσταση “ $\xi_3=1$ ”.

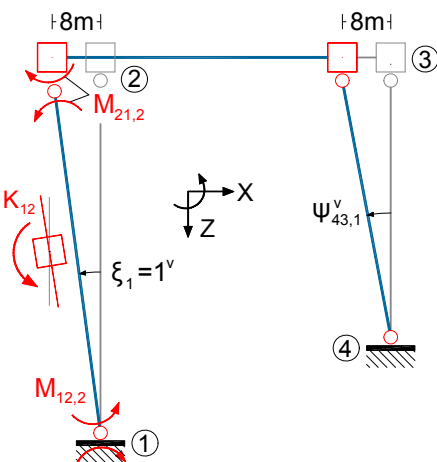
Βήμα 3. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας K_{i1} , K_{i2} , K_{i3} ($i=1,2,3$)

Ο υπολογισμός θα γίνει με εφαρμογή της αρχής των δυνατών μετακινήσεων (ΑΔΕ).



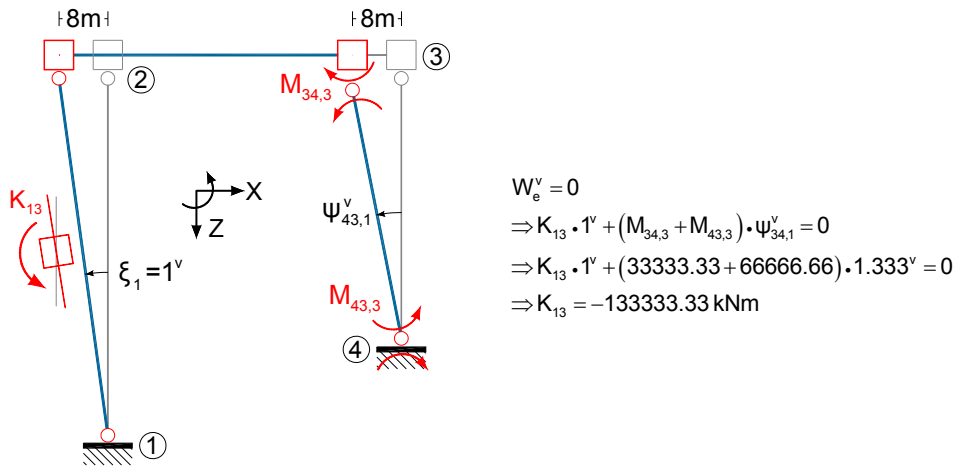
$$\begin{aligned} W_e^v &= 0 \\ \Rightarrow K_{11} \cdot 1^v + (M_{12,1} + M_{21,1}) \cdot \psi_{12,1}^v + (M_{34,1} + M_{43,1}) \cdot \psi_{43,1}^v &= 0 \\ \Rightarrow K_{11} \cdot 1^v + [2 \cdot (-75000)] \cdot 1^v + [2 \cdot (-133333.33)] \cdot 1.33^v &= 0 \\ \Rightarrow K_{11} &= 505555.55 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Σχήμα 9.3-1 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση “ $\xi_1=1$ ” για τον υπολογισμό του K_{11} .



$$\begin{aligned} W_e^v &= 0 \\ \Rightarrow K_{12} \cdot 1^v + (M_{12,2} + M_{21,2}) \cdot \psi_{12,1}^v &= 0 \\ \Rightarrow K_{12} \cdot 1^v + (25000 + 50000) \cdot 1^v &= 0 \\ \Rightarrow K_{12} &= -75000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

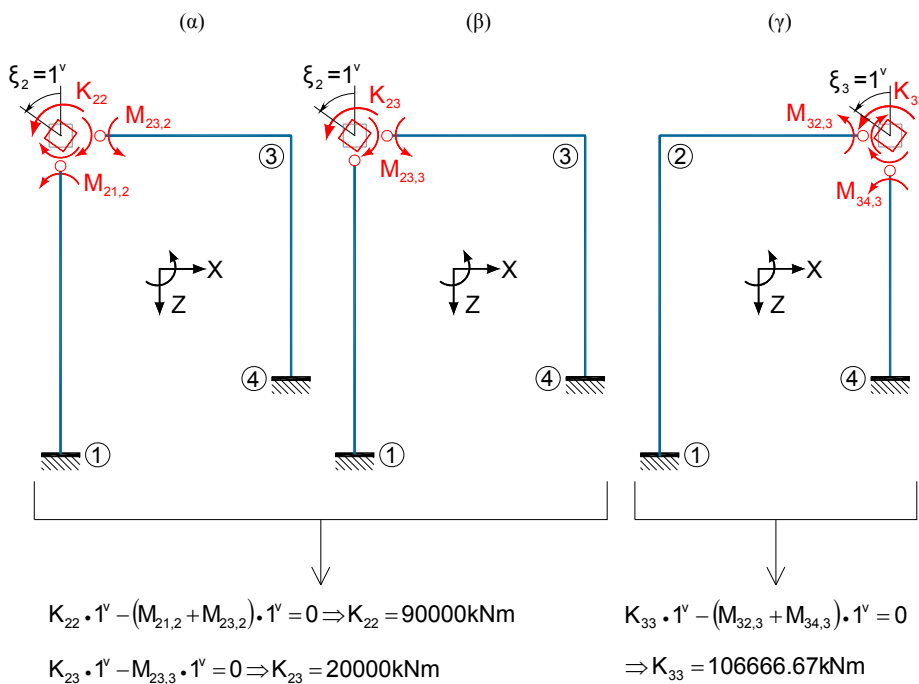
Σχήμα 9.3-2 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση “ $\xi_2=1$ ” για τον υπολογισμό του K_{12} .



Σχήμα 9.3-3 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση " $\xi_3=1^v$ " για τον υπολογισμό του K_{13} .

Λόγω της συμμετρίας του μητρώου στιβαρότητας, οι παραπάνω συντελεστές στιβαρότητας K_{12} και K_{13} είναι ίσοι με τους συντελεστές στιβαρότητας K_{21} και K_{31} αντίστοιχα, για τους οποίους έτσι δεν χρειάζεται νέος υπολογισμός.

Ακολουθεί ο υπολογισμός των υπολοίπων συντελεστών K_{22} , $K_{23}=K_{32}$ και K_{33} .



Σχήμα 9.3-4 (α) Κατάσταση $\xi_2=1^v$ με ένταση λόγω " $\xi_2=1^v$ " για τον υπολογισμό του K_{22} ,

(β) Κατάσταση $\xi_2=1^v$ με ένταση λόγω " $\xi_3=1^v$ " για τον υπολογισμό του K_{23} , και

(γ) Κατάσταση $\xi_3=1^v$ με ένταση λόγω " $\xi_3=1^v$ " για τον υπολογισμό του K_{33} .

Βήματα 4-5-6. Υπολογισμός των μεγεθών έντασης της κατάστασης "0" και των φορτιστικών όρων K_{i0} ($i=1,2,3$) - Επίλυση του συστήματος εξισώσεων και διαγράμματα M, Q

Φόρτιση α

Η ένταση του ΓΚΣ, λόγω της μοναχικής οριζόντιας δύναμης στο μέσον του στύλου 1-2, είναι ακριβώς ίδια με την ένταση του ΓΚΣ της Άσκησης 6, διότι η ύπαρξη ή μη άρθρωσης στον κόμβο 3 δεν επηρεάζει τις ροπές

που αναπτύσσονται στον φορτιζόμενο στύλο 1-2. Τα άλλα δύο στοιχεία (2-3 και 3-4) του ΓΚΣ είναι αφόρטיστα και, επομένως, η έντασή τους είναι μηδενική, είτε υπάρχει είτε δεν υπάρχει άρθρωση στον κόμβο 3.

Από τα παραπάνω συνάγεται άμεσα ότι οι τιμές των συντελεστών K_{10} και K_{20} είναι ίδιες με αυτές που υπολογίστηκαν στα πλαίσια της Άσκησης 6. Επιπλέον, επειδή η ένταση του ΓΚΣ περιορίζεται μόνο στο στοιχείο 1-2, η τιμή K_{30} της αντίδρασης (ροπής) της δικινητής πάκτωσης του κόμβου 3 στην κατάσταση "0" είναι ίση με το μηδέν. Έχουμε έτσι:

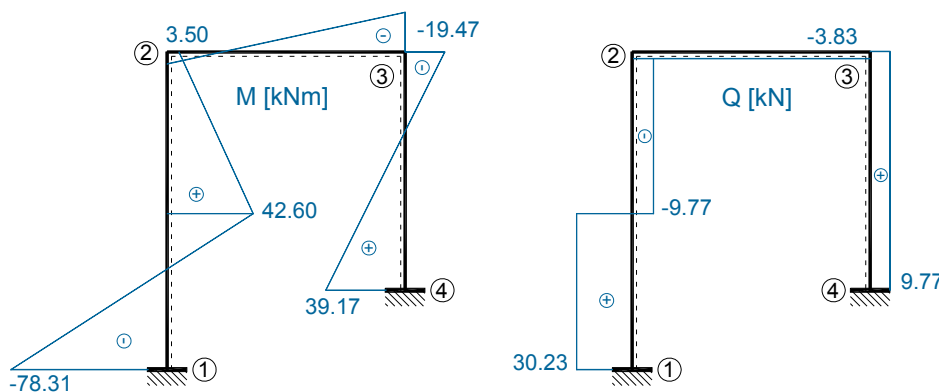
$$K_{10}^{(a)} = 160 \quad K_{20}^{(a)} = -40 \quad K_{30}^{(a)} = 0$$

Το σύστημα των τριών επιλυσιμών εξισώσεων για τη φόρτιση α δίνεται παρακάτω. Από την επίλυσή του προκύπτουν οι τιμές των τριών αγνώστων μεγεθών μετακίνησης ξ_i ($i=1,2,3$):

$$\left. \begin{aligned} K_1 = 0 & \Rightarrow 505555.556 \cdot \xi_1 - 75000 \cdot \xi_2 - 133333.33 \cdot \xi_3 + 160 = 0 \\ K_2 = 0 & \Rightarrow -75000 \cdot \xi_1 + 90000 \cdot \xi_2 + 20000 \cdot \xi_3 - 40 = 0 \\ K_3 = 0 & \Rightarrow -133333.33 \cdot \xi_1 + 20000 \cdot \xi_2 + 106666.667 \cdot \xi_3 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \xi_1 &= -4.41 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \xi_2 &= 2.08 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \xi_3 &= -5.91 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned}$$

Διαγράμματα M και Q για τη φόρτιση α

Ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε αναλυτικά στις προηγούμενες ασκήσεις προκύπτουν τα διαγράμματα που δίνονται στο παρακάτω σχήμα 9.4.

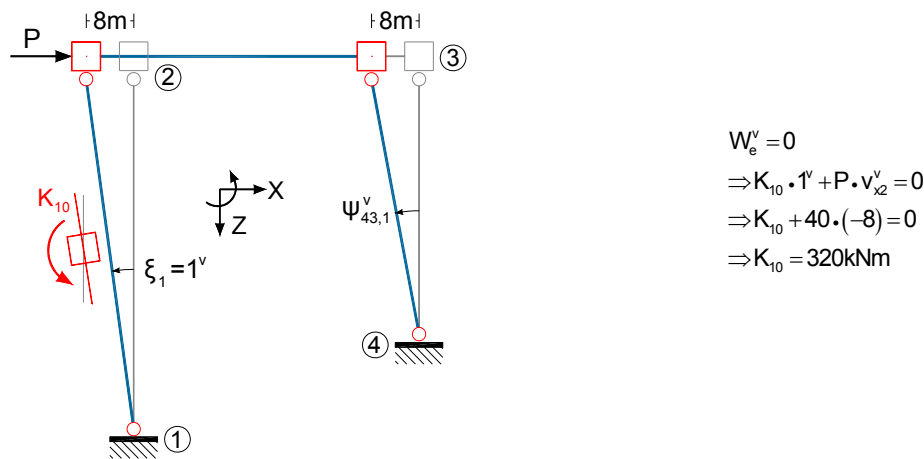


Σχήμα 9.4 Διαγράμματα M και Q λόγω φόρτισης α.

Φόρτιση β

Χαρακτηριστικό γνώρισμα της φόρτισης β είναι το γεγονός ότι αποτελείται από μοναχικές δυνάμεις που ασκούνται επάνω στους κόμβους του φορέα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, στην κατάσταση "0" το ΓΚΣ να παραμένει απαραμόρφωτο (Υπενθύμιση: $EA \rightarrow \infty$). Έτσι, οι ροπές είναι μηδενικές και αναπτύσσονται μόνον αξονικές δυνάμεις. Για τον υπολογισμό των K_{20} και K_{30} θεωρούμε τις καταστάσεις δυνατών μετακινήσεων $\xi_2=1^v$ και $\xi_3=1^v$ αντίστοιχα, και καταγράφουμε τα δυνατά έργα που παράγονται από τα εντασιακά μεγέθη της κατάστασης "0". Ελλείπει, όμως, ροπών στην κατάσταση "0", η εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων δίνει $K_{20}=0$ και $K_{30}=0$.

Για τον υπολογισμό του φορτιστικού όρου K_{10} , θεωρούμε την κατάσταση δυνατής μετακίνησης " $\xi_1=1^h$ " και καταγράφουμε τα δυνατά έργα που παράγονται από τα εντασιακά μεγέθη της κατάστασης "0" (Σχ. 9.5).



Σχήμα 9.5 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση "0" για τον υπολογισμό του K_{10} .

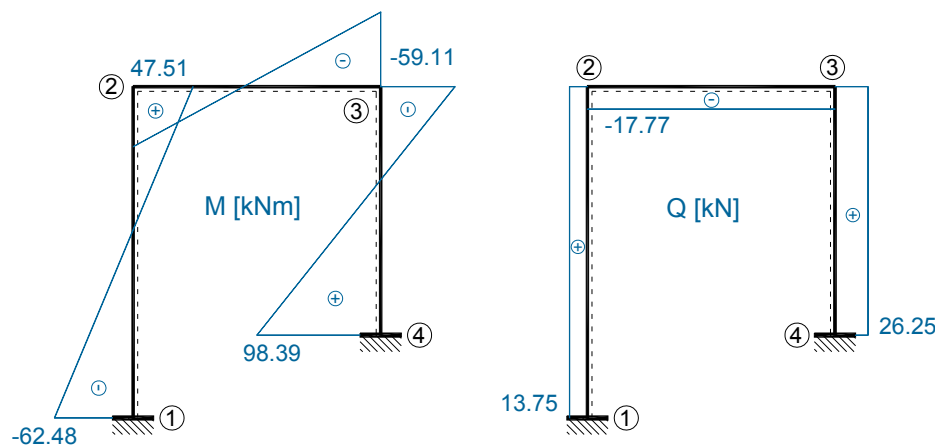
Έτσι το σύστημα των τριών επιλυσιμών εξισώσεων και η λύση του για τη φόρτιση β είναι:

$$\left. \begin{matrix} K_1=0 \\ K_2=0 \\ K_3=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 505555.56 \cdot \xi_1 - 75000 \cdot \xi_2 - 133333.33 \cdot \xi_3 + 320 = 0 \\ -75000 \cdot \xi_1 + 90000 \cdot \xi_2 + 20000 \cdot \xi_3 = 0 \\ -133333.33 \cdot \xi_1 + 20000 \cdot \xi_2 + 106666.67 \cdot \xi_3 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \xi_1 = -10.33 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \xi_2 = -5.99 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \xi_3 = -11.79 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{matrix} \right.$$

Θα πρέπει, τέλος, να τονιστεί ότι η επιρροή των δύο κατακορύφων φορτίων περιορίζεται μόνο στη δημιουργία αξονικών δυνάμεων στους στύλους 1-2 και 3-4, και δεν επηρεάζει καθόλου την καμπτική ένταση και παραμόρφωση του φορέα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, στο πλαίσιο της Γραμμικής Στατικής, η κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας γίνεται στον απαραμόρφωτο φορέα (Θεωρία 1ης τάξης, βλ. [2], παράγρ. 2.1.3 και 2.1.5).

Διαγράμματα M και Q για τη φόρτιση β

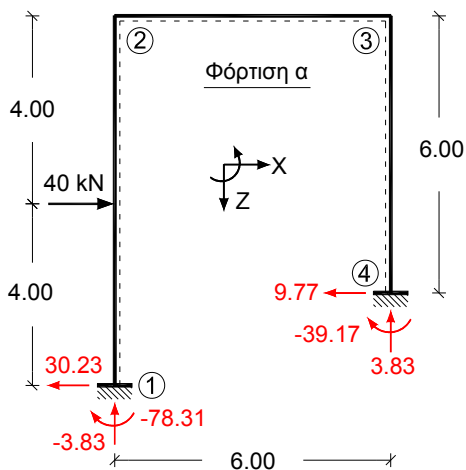
Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία, που περιγράφηκε αναλυτικά στις προηγούμενες ασκήσεις, προκύπτουν τα διαγράμματα που δίνονται στο παρακάτω σχήμα 9.6.



Σχήμα 9.6 Διαγράμματα M και Q λόγω φόρτισης β .

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολουθώς διενεργούνται τρεις ισορροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα για κάθε μία περίπτωση φόρτισης.



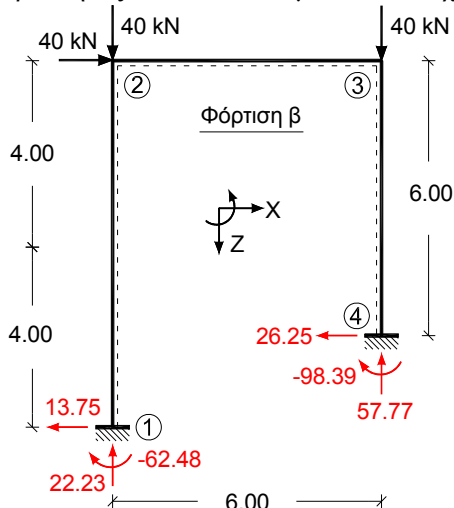
$$\sum F_x = 40 - 30.23 - 9.77 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 3.83 - 3.83 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = -78.31 - 39.17 - (3.83 \cdot 6) - (9.77 \cdot 2) + (40 \cdot 4) = 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 9.7 Ισοροπιακοί έλεγχοι αποτελεσμάτων - Φόρτιση α.

Οι ισοροπιακοί έλεγχοι του σχήματος 9.7 αφορούν στον έλεγχο ορθότητας των αποτελεσμάτων του σχήματος 9.4 (περίπτωση φόρτισης α), ενώ οι ισοροπιακοί έλεγχοι του σχήματος 9.8 αφορούν στον έλεγχο ορθότητας των αποτελεσμάτων του σχήματος 9.6 (περίπτωση φόρτισης β).



$$\sum F_x = 40 - 13.75 - 26.25 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 22.23 + 57.77 - (2 \cdot 40) = 0 \text{ kN}$$

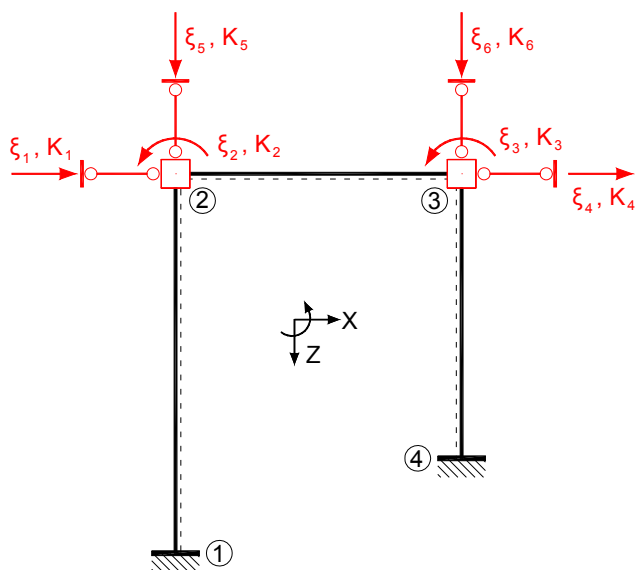
$$\sum M_1 = -62.48 - 98.39 - (57.77 \cdot 6) - (26.25 \cdot 2) + (40 \cdot 8) + (40 \cdot 6) = 0.01 \approx 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 9.8 Ισοροπιακοί έλεγχοι αποτελεσμάτων - Φόρτιση β.

Και στις δύο περιπτώσεις οι τρεις συνθήκες ισοροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισοροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.

2. Επίλυση με την MM για τη φόρτιση β χωρίς την παραδοχή της ατένειας

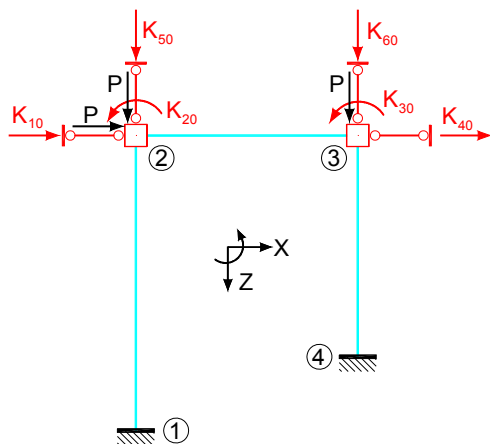
Εφόσον αρθεί η παραδοχή της ατένειας του φορέα, οι κόμβοι 2 και 3 αποκτούν τη δυνατότητα μετακινήσεων κατά τις διευθύνσεις των αξόνων X και Z. Επομένως, το ΓΚΣ του φορέα προκύπτει με δέσμευση των οριζοντίων και κατακορύφων βαθμών ελευθερίας των κόμβων 2 και 3, ταυτόχρονα, βεβαίως, με τη δικινητή πάκτωση τους (βλ. Σχ. 9.9).



Σχήμα 9.9 Το ΓΚΣ του φορέα του σχήματος 9.0 χωρίς την παραδοχή της ατένειας.

Παρατηρούμε ότι η άρση της παραδοχής της ατένειας, οδηγεί για τον συγκεκριμένο φορέα σε διπλασιασμό του πλήθους N των υπεραριθμών γεωμετρικών μεγεθών: από $N=3$ (βλ. Σχ. 9.1) σε $N=6$.

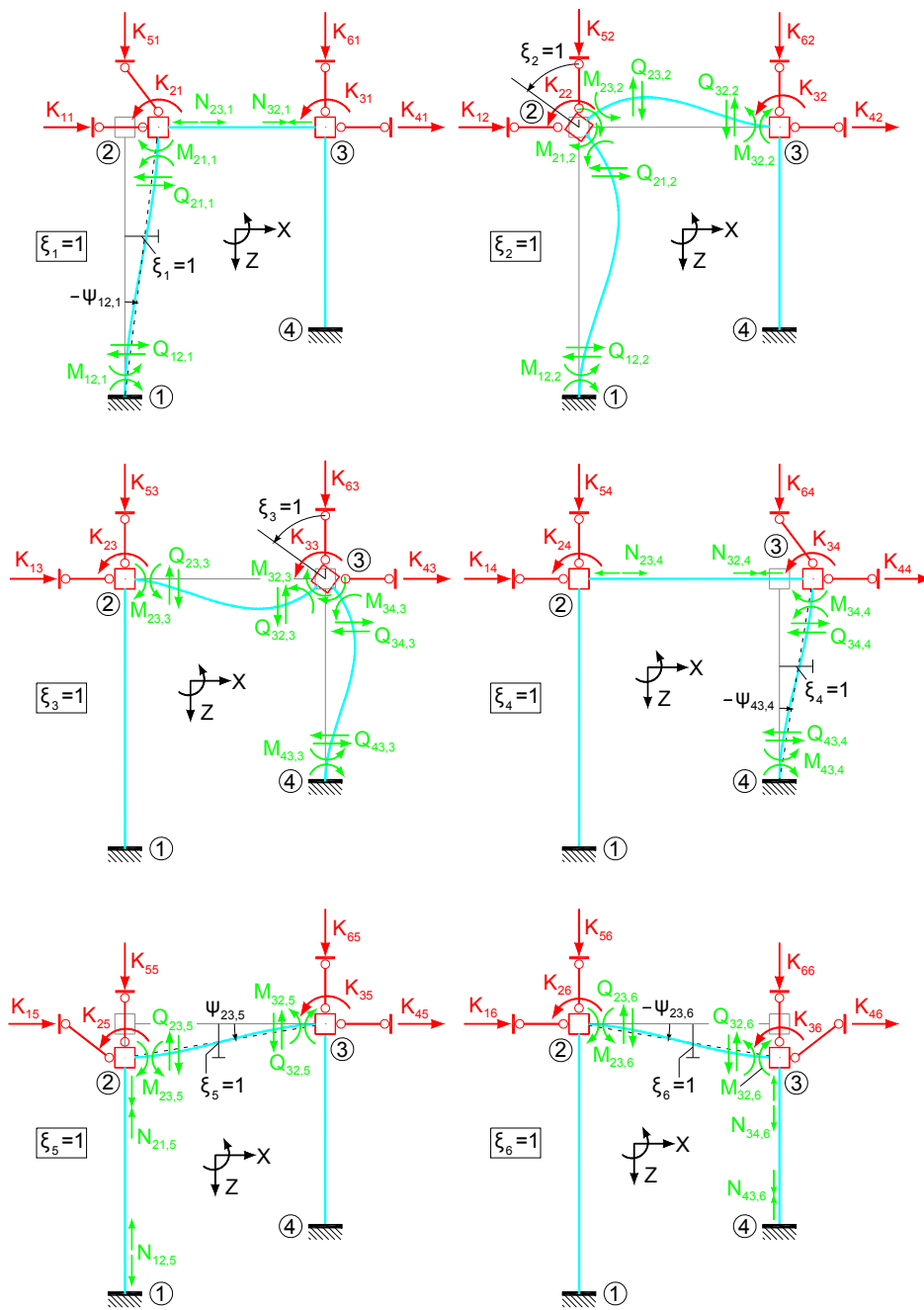
Ακολούθως, παρουσιάζεται συνοπτικά η διαδικασία επίλυσης με τη βοήθεια των σχημάτων 9.10 έως 9.9. Στο σχήμα 9.10 απεικονίζεται η κατάσταση "0", κατά την οποία βεβαίως, δεν αναπτύσσονται παραμορφώσεις στο ΓΚΣ, αφού τα εξωτερικά μοναχικά φορτία δρουν στους παγιωμένους κόμβους 2 και 3.



Σχήμα 9.10 Παραμόρφωση (εδώ: μηδενική) και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0".

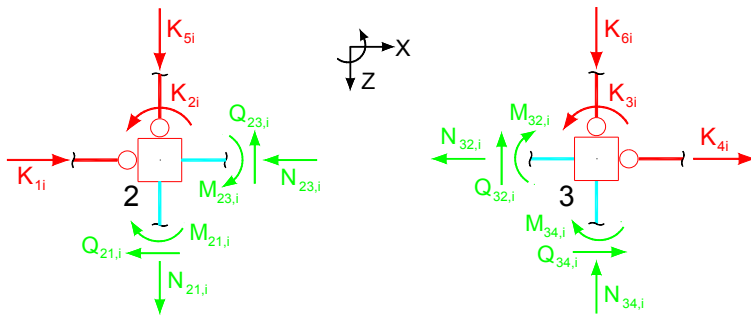
Στην κατάσταση "0", τα μοναχικά εξωτερικά φορτία παραλαμβάνονται άμεσα από τις αντίστοιχες δεσμικές ράβδους και, επομένως, η ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" συνίσταται μόνον στις αντιδράσεις $K_{10}=-P$, $K_{50}=-P$ και $K_{60}=-P$.

Στο σχήμα 9.11 απεικονίζονται η παραμόρφωση (ποιοτικά) του ΓΚΣ και τα αναπτυσσόμενα εντασιακά μεγέθη στις μοναδιαίες καταστάσεις " $\xi_i=1$ ". Ο προσδιορισμός των αριθμητικών τους τιμών επαφίεται ως άσκηση στον αναγνώστη.



Σχήμα 9.11 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στις καταστάσεις " $\xi_i=1$ " ($i=1,2,\dots,6$).

Τέλος, το σχήμα 9.12 αναφέρεται στην κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας δυνάμεων (κατά X και κατά Z) και ροπών που δρουν στους κόμβους 2 και 3, οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των συντελεστών στιβαρότητας K_{ij} και των φορτιστικών όρων K_{i0} .



Κόμβος 2:

$$\sum M^{(2)} = 0 \Rightarrow K_{2i} - M_{23,i} - M_{21,i} = 0$$

$$\sum F_z^{(2)} = 0 \Rightarrow K_{5i} + N_{21,i} - Q_{23,i} = 0$$

$$\sum F_x^{(2)} = 0 \Rightarrow K_{1i} - N_{23,i} - Q_{21,i} = 0$$

Κόμβος 3:

$$\sum M^{(3)} = 0 \Rightarrow K_{3i} - M_{32,i} - M_{34,i} = 0$$

$$\sum F_z^{(3)} = 0 \Rightarrow K_{6i} - N_{34,i} - Q_{32,i} = 0$$

$$\sum F_x^{(3)} = 0 \Rightarrow K_{4i} - N_{32,i} + Q_{34,i} = 0$$

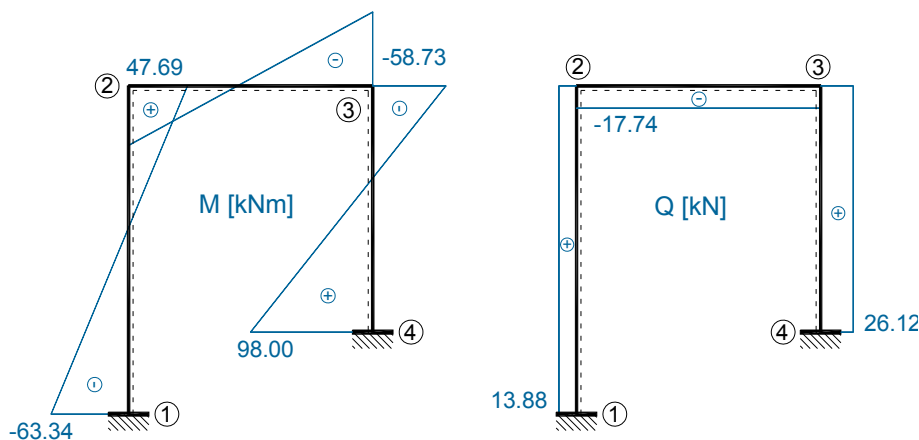
Σχήμα 9.12 Εντασιακά μεγέθη που ενεργούν στους κόμβους 2 και 3 του ΓΚΣ του φορέα ($i = 0, 1, 2, \dots, 6$) και οι αντίστοιχες εξισώσεις ισορροπίας.

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας του σχήματος 9.12 για τις έξι μοναδιαίες καταστάσεις και την κατάσταση "0", προκύπτει το σύστημα των εξισώσεων που δίνεται παρακάτω. Από τη λύση του παίρνουμε τις τιμές των έξι υπεράριθμων μεγεθών μετακίνησης ξ_i ($i = 1, 2, \dots, 6$).

$$\begin{bmatrix} 139843.75 & 9375 & 0 & -137500 & 0 & 0 \\ 9375 & 90000 & 20000 & 0 & -10000 & 10000 \\ 0 & 20000 & 106666.67 & 16666.67 & -10000 & 10000 \\ -137500 & 0 & 16666.67 & 143055.56 & 0 & 0 \\ 0 & -10000 & -10000 & 0 & 234583.33 & -3333.33 \\ 0 & 10000 & 10000 & 0 & -3333.33 & 311666.67 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.426 \cdot 10^{-3} \\ -6.260 \cdot 10^{-4} \\ -11.78 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.236 \cdot 10^{-3} \\ 9.627 \cdot 10^{-5} \\ 1.873 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Τα διαγράμματα M και Q προκύπτουν ακολουθώντας τη γνωστή από τις προηγούμενες ασκήσεις διαδικασία και δίνονται στο παρακάτω σχήμα 9.13.



Σχήμα 9.13 Διαγράμματα M και Q λόγω φόρτισης β χωρίς την παραδοχή της ατένειας.

Σύγκριση αποτελεσμάτων με και χωρίς την παραδοχή της ατένειας

Στον παρακάτω πίνακα 9.1 παρουσιάζονται συγκεντρωτικά και συγκρίνονται οι τιμές των ροπών M και των τεμνουσών Q του φορέα, που προέκυψαν από τις επιλύσεις με και χωρίς την παραδοχή της ατένειας:

		A Φορέας με EA= πεπερ.	B Ατενής φορέας EA→∞	Ποσοστιαία απόκλιση $\frac{ (A - B) }{A} \cdot 100\%$
Μετακινήσεις	u_2 [mm]	8.426	8.264	1.92%
	u_3 [mm]	8.236	8.264	0.34%
	φ_2 [mrad]	-62.6	-59.9	4.31%
	φ_3 [mrad]	-117.8	-117.9	≈0%
Ροπές κάμψης [kNm]	M_{12}	-63.34	-62.48	1.36%
	M_{21} = M_{23}	47.69	47.51	0.38%
	M_{32} = M_{34}	-58.73	-59.11	0.65%
	M_{43}	98.00	98.39	0.40%
Τέμνουσες δυνάμεις [kN]	Q_{12}	13.88	13.75	0.94%
	Q_{23}	-17.74	-17.77	0.17%
	Q_{34}	26.12	26.25	0.50%

Πίνακας 9.1 Σύγκριση τελικών ροπών και τεμνουσών του δυστενούς και του ατενούς φορέα.

Από την παραπάνω σύγκριση προκύπτει ότι, όσον αφορά στα εντασιακά μεγέθη, η άρση της παραδοχής της ατένειας δεν τροποποιεί ουσιαστικά τα αποτελέσματα. Με άλλα λόγια, επιβεβαιώνεται ότι για το δεδομένο κινητό πλαίσιο η επιρροή των αξονικών παραμορφώσεων επί των ροπών κάμψης (και κατά συνέπεια επί των τεμνουσών δυνάμεων, όπως, επίσης, εδώ και επί των αξονικών δυνάμεων, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τις τέμνουσες) είναι αμελητέα. Επομένως, για τον φορέα αυτόν η παραδοχή της ατένειας μπορεί να θεωρηθεί ως μία ρεαλιστική παραδοχή, η οποία διευκολύνει τους υπολογισμούς (Μείωση των υπεραριθμών μεγεθών από N=6 σε N=3!) αφήνοντας πρακτικώς αναλλοίωτα τα αποτελέσματα.

Στο σημείο αυτό, σημειώνεται ότι, σε υπερπάγιους φορείς (βλ. π.χ. [3], Άσκηση 26) η παραδοχή της ατένειας μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τα εντασιακά αποτελέσματα της στατικής επίλυσης, και, επομένως, η παραδοχή αυτή πρέπει να χρησιμοποιείται με προσοχή.

Όσον αφορά στα αποτελέσματα για τα μεγέθη παραμόρφωσης, παρατηρούμε ότι στον φορτισμένο με ένα κατακόρυφο συγκεντρωμένο φορτίο κόμβο 3, οι αποκλίσεις είναι πρακτικά μηδενικές (0.34% και ≈0%), ενώ στον φορτισμένο με ένα κατακόρυφο και ένα οριζόντιο συγκεντρωμένο φορτίο κόμβο 2, οι αποκλίσεις φθάνουν το 4.31% όντας, έτσι, μεγαλύτερες του 3% που συνήθως γίνεται δεκτό ως όριο θεμιτών αποκλίσεων λόγω αριθμητικών στρογγυλοποιήσεων. Στις συνήθεις συμβατικές περιπτώσεις της πράξης, μπορεί να περιοριστεί κανείς στον ικανοποιητικά ακριβή υπολογισμό των εντασιακών μεγεθών, δηλαδή των ροπών, των τεμνουσών και των αξονικών δυνάμεων, βάσει των οποίων γίνεται η διαστασιολόγηση των διατομών. Αν, όμως, για οποιονδήποτε λόγο απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια και στον υπολογισμό των μετατοπίσεων, τότε η παραδοχή της ατένειας σκόπιμο είναι να αποφεύγεται.

Αξίζει να θυμηθούμε στο σημείο αυτό ότι, η θεώρηση ατενών φορεών γίνεται αφενός για διδακτικούς λόγους και αφετέρου για να μειωθεί το πλήθος των αγνώστων, όταν οι υπολογισμοί γίνονται "με το χέρι". Στη δομική πράξη, όπου όλοι (ή σχεδόν όλοι) οι υπολογισμοί διενεργούνται με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών, η μείωση του πλήθους των αγνώστων έχει περιορισμένη (αν και όχι μηδενική!) σημασία και για αυτό, κατά κανόνα, δεν χρειάζεται να γίνεται η παραδοχή της ατένειας.

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 4

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
- [2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙ: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
- [3] Αβραμίδης, Ι.Ε. & Μορφίδης, Κ.Ε. (2007). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙβ: Η κλασική μέθοδος των μετακινήσεων - Σύνοψη θεωρίας και ασκήσεις*. Θεσσαλονίκη: Σοφία.

Κεφάλαιο 5

Φορείς με στοιχεία πεπερασμένης δυστένειας

Σύνοψη

Οι ασκήσεις 10, 11 και 12 του κεφαλαίου αυτού αφορούν σε κινητούς ατενείς φορείς, οι οποίοι συμπεριλαμβάνουν μεταξύ άλλων και στοιχεία πεπερασμένης δυστένειας EA , δηλαδή στοιχεία που η μεταβολή του μήκους τους (μήκυνση, βράχυνση) δεν μπορεί να αγνοηθεί, αλλά πρέπει να ληφθεί υπόψη. Στην πράξη, τέτοια στοιχεία είναι συνήθως εντατήρες ή καλώδια, που προσομοιώνονται στο στατικό μοντέλο ως (αμφιαρθρωτές) ράβδοι. Για τις ράβδους αυτές αίρεται η παραδοχή της ατένειας $EA \rightarrow \infty$, ενώ διατηρείται ως ρεαλιστική παραδοχή για τα υπόλοιπα στοιχεία (δοκούς, στύλους) του φορέα. Υπενθυμίζεται ότι, η παραδοχή της ατένειας στοχεύει στη μείωση του πλήθους των άγνωστων μετακινήσεων, δηλαδή στη μείωση του πλήθους των προς επίλυση εξισώσεων. Η μείωση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική κατά τη «χειρωνακτική» επίλυση φορέων «με το χέρι». Εντούτοις, δεδομένου ότι στην πράξη όλοι οι υπολογισμοί διενεργούνται πλέον με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή και κατάλληλου λογισμικού, η μείωση των αγνώστων μέσω της παραδοχής της ατένειας (π.χ. για δοκούς ή/και στύλους) δεν είναι απαραίτητη, ακόμη κι αν η παραδοχή αυτή είναι ρεαλιστική.

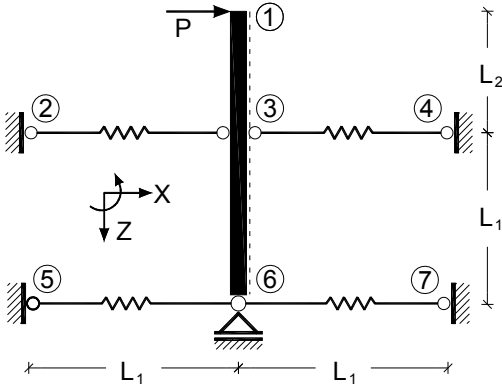
Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων (βλ. π.χ. [2]-κεφ.3) και οπωσδήποτε η μελέτη των ασκήσεων των προηγούμενων κεφαλαίων 1, 2, 4 και 4. Σε κάθε περίπτωση απαιτείται καλή γνώση της Στατικής των ισοστατικών φορέων, καθώς και επαρκής εξοικείωση με τη Μέθοδο των υπεραριθμών δυνάμεων για υπερστατικούς φορείς (βλ. π.χ. [1] και [2]-κεφ.2, καθώς και λοιπή σχετική βιβλιογραφία της παραγράφου Ε7).

Άσκηση 10

Εκφώνηση

Ο φορέας του σχήματος 10.0, του οποίου το στοιχείο 1-6 θεωρείται απολύτως στερεό, να επιλυθεί με τη ΜΜ. Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα M, Q, N και η παραμορφωμένη κατάσταση του φορέα.



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία Φόρτιση
 $L_1=4.00\text{m}$ $P=100\text{kN}$
 $L_2=3.00\text{m}$

Απολύτως στερεό στοιχείο 1-3-6
 $EI=0, GA_S=0$

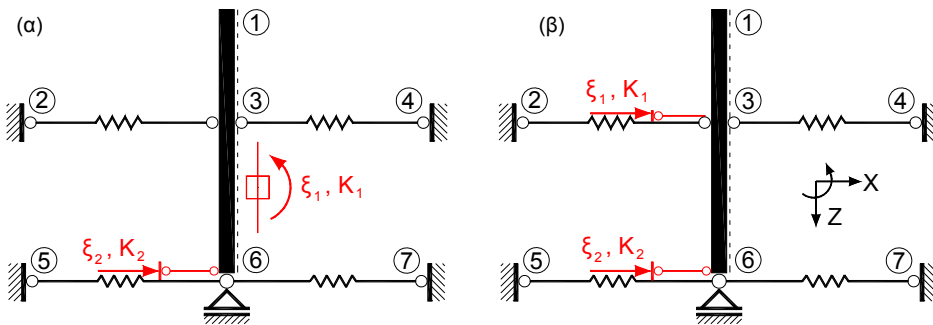
Οριζόντιες ράβδους
 $EA_{67}=EA=10^4\text{kN}$
 $EA_{23}=2/3(EA)$
 $EA_{34}=1/3(EA)$
 $EA_{56}=1/2(EA)$

Σχήμα 10.0 Δεδομένος Φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

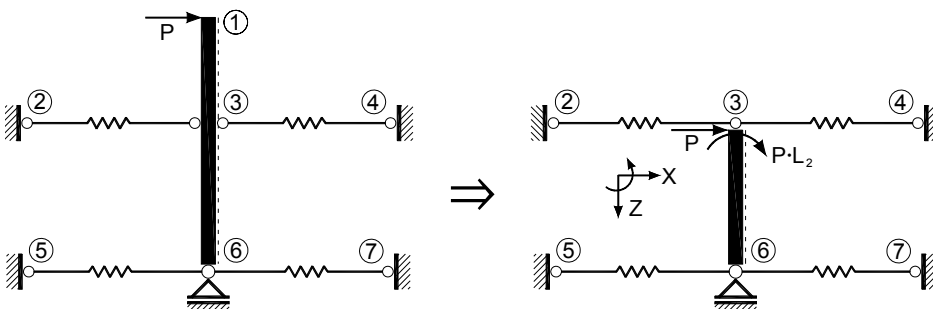
Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Ο φορέας αποτελείται από το απολύτως στερεό στοιχείο 1-6 και από τέσσερις οριζόντιες ράβδους πεπερασμένης δυστένειας. Λόγω του γεγονότος ότι το στοιχείο 1-6 στηρίζεται ακλόνητα μόνο κατά την κατακόρυφη διεύθυνση, οι βαθμοί ελευθερίας (BE) του, και άρα οι BE του δεδομένου φορέα, είναι η οριζόντια παράλληλη μετατόπισή του και η στροφή της χορδής του. Για τον καθορισμό του ΓΚΣ θα πρέπει, επομένως, να δεσμευτούν αυτοί οι δυο BE, π.χ., με έναν από τους δυο τρόπους του σχήματος 10.1. Για την ακόλουθη επίλυση επιλέγεται το ΓΚΣ του σχήματος 10.1(α).



Σχήμα 10.1 Καθορισμός του ΓΚΣ φορέα: (α) με δέσμευση της οριζόντιας μετακίνησης του κόμβου 6 και παγίωση της χορδής 1-6, (β) με δέσμευση των οριζοντίων μετακινήσεων των κόμβων 3 και 6.

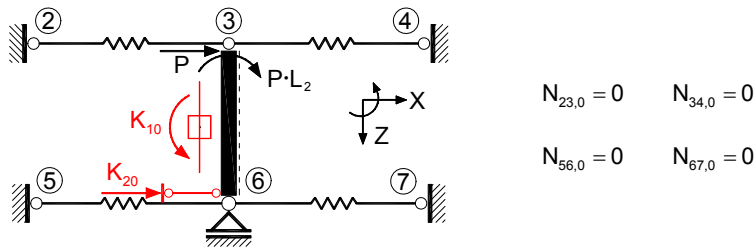
Ο πρόβολος 1-3 αφαιρείται για λόγους απλούστευσης και υποκαθίσταται από τα φορτία διατομής που δρούν στον κόμβο 3 (βλ. Σχ. 10.2).



Σχήμα 10.2 Υποκατάσταση του ισοστατικού τμήματος 1-3 από τις αντιδράσεις του.

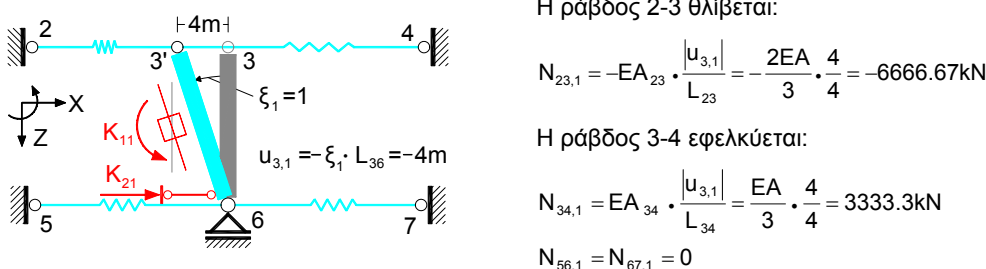
Βήμα 2. Υπολογισμός των μεγεθών έντασης/μετακίνησης της κατάστασης "0"

Στην κατάσταση "0" οι κόμβοι 3 και 6 παραμένουν αμετατόπιστοι. Επομένως, οι τέσσερις ράβδοι διατηρούν αμετάβλητο το μήκος τους και, άρα, παραμένουν άτονες. Όλη η εξωτερική φόρτιση παραλαμβάνεται από τους προστεθέντες συνδέσμους. Η ροπή $P \cdot L_2$ δημιουργεί, βεβαίως, καμπτική ένταση στο στοιχείο 3-6, το οποίο όμως εξ' ορισμού δεν μπορεί να υποστεί καμπτική (ούτε και άλλη) παραμόρφωση.



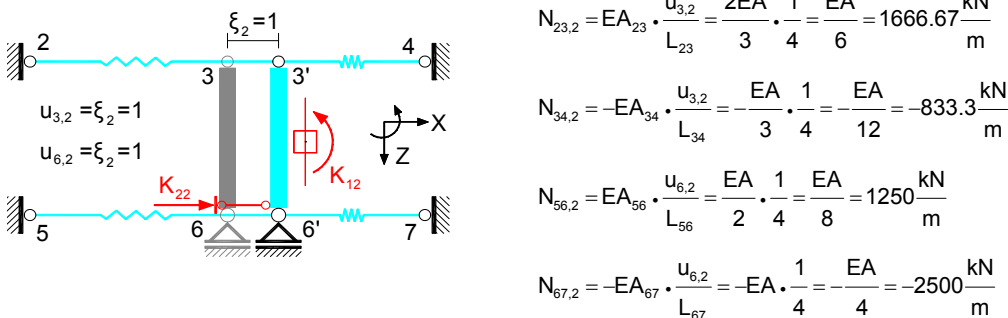
Σχήμα 10.3 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0".

Βήμα 3. Υπολογισμός μεγεθών έντασης/μετακίνησης των καταστάσεων " $\xi_i=1$ " ($i=1,2$)



Σχήμα 10.4-1 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_1=1$ ".

Οι ράβδοι 2-3 και 5-6 εφελκύνονται, ενώ οι ράβδοι 3-4 και 6-7 θλίβονται:



Σχήμα 10.4-2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_2=1$ ".

Σημείωση:

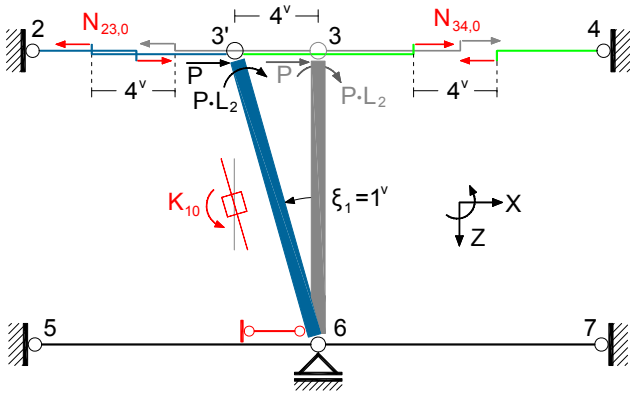
Υπενθυμίζεται ότι, για λόγους καλύτερης εποπτείας, η κλίμακα σχεδίασης των μετακινήσεων είναι, κατά κανόνα, διαφορετική από την κλίμακα σχεδίασης του φορέα. Έτσι, π.χ., η οριζόντια μετατόπιση του κόμβου 3 στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " είναι αριθμητικά ίση με $L_1=4m$, όσο, δηλαδή, και το μήκος του στοιχείου 6-3, σχεδιάστηκε, όμως, πολύ μικρότερη για να φαίνεται καλύτερα η παραμορφωμένη κατάσταση.

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών φορτίου K_{i0} και στιβαρότητας K_{i1} και K_{i2} ($i=1,2$)

Οι συντελεστές K_{i0} , K_{i1} και K_{i2} είναι οι αντιδράσεις της προστεθείσας δεσμικής ράβδου i στις καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ " αντίστοιχα. Ο υπολογισμός τους θα γίνει με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων (ΑΔΕ). Προς τούτο καταγράφονται τα δυνατά έργα που παράγει κάθε μία από τις εντασιακές καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ " επί των δυνατών μετακινήσεων των δύο καταστάσεων " $\xi_1=1$ " (βλ. σχήματα 10.5-1 έως 10.5-3) και " $\xi_2=1$ " (βλ. σχήματα 10.6-1 έως 10.6-3) και τίθενται ίσα με το μηδέν.

Σημείωση:

Στα έξι παρακάτω σχήματα η αρχική θέση του στοιχείου 6-3 δίνεται σε ανοικτό γκρι χρώμα, ενώ η θέση του μετά την επιβολή της δυνατής μετακίνησης (" $\xi_1=1^m$ " και " $\xi_2=1^m$ ") σε μπλε χρώμα. Επίσης, σε ανοικτό γκρι χρώμα δίνονται τα εντασιακά μεγέθη στις θέσεις που δρούσαν πριν την επιβολή της δυνατής μετακίνησης, ενώ στις θέσεις που δρουν μετά την επιβολή της δυνατής μετακίνησης δίνονται σε κόκκινο χρώμα (φορτία διατομής και αντιδράσεις K_{mn}) ή σε μαύρο χρώμα (εξωτερικά φορτία). Τέλος, οι οριζόντιες ράβδοι, που μηκώνονται κατά την δυνατή μετακίνηση, δίνονται σε πράσινο, ενώ εκείνες που βραχύνονται σε μπλε χρώμα.

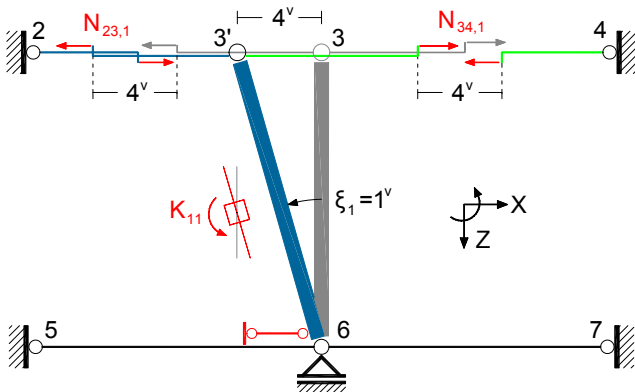


$$K_{10} \cdot 1^m + N_{23,0} \cdot 4^m - N_{34,0} \cdot 4^m - P \cdot 4^m - (P \cdot L_2) \cdot 1^m = 0 \Rightarrow$$

$$K_{10} \cdot 1^m + 0 \cdot 4^m - 0 \cdot 4^m - 100 \cdot 4^m - (100 \cdot 3) \cdot 1^m = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} = 700 \text{ kNm}$$

Σχήμα 10.5-1 Υπολογισμός του συντελεστή K_{10} με την ΑΔΕ.



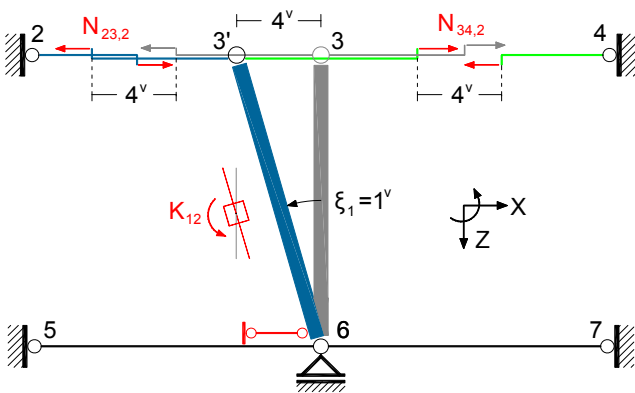
$$K_{11} \cdot 1^m + N_{23,1} \cdot 4^m - N_{34,1} \cdot 4^m = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} \cdot 1^m + \left(-\frac{2EA}{3}\right) \cdot 4^m - \left(\frac{EA}{3}\right) \cdot 4^m = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} \cdot 1^m + (-6666.67) \cdot 4^m - (3333.33) \cdot 4^m = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} = 40000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 10.5-2 Υπολογισμός του συντελεστή K_{11} με την ΑΔΕ.



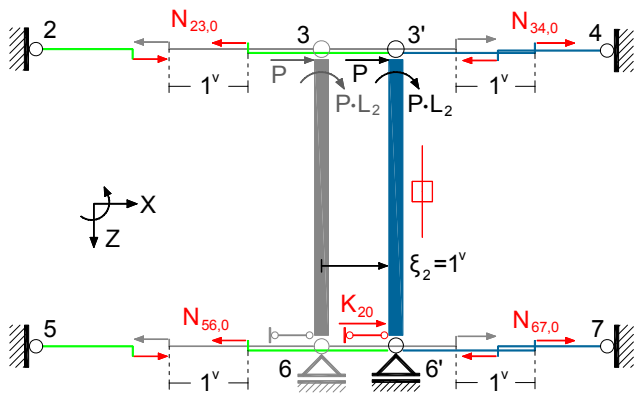
$$K_{12} \cdot 1^m + N_{23,2} \cdot 4^m - N_{34,2} \cdot 4^m = 0$$

$$\Rightarrow K_{12} \cdot 1^m + \left(\frac{EA}{6}\right) \cdot 4^m - \left(-\frac{EA}{12}\right) \cdot 4^m = 0$$

$$\Rightarrow K_{12} \cdot 1^m + (1666.67) \cdot 4^m - (-833.33) \cdot 4^m = 0$$

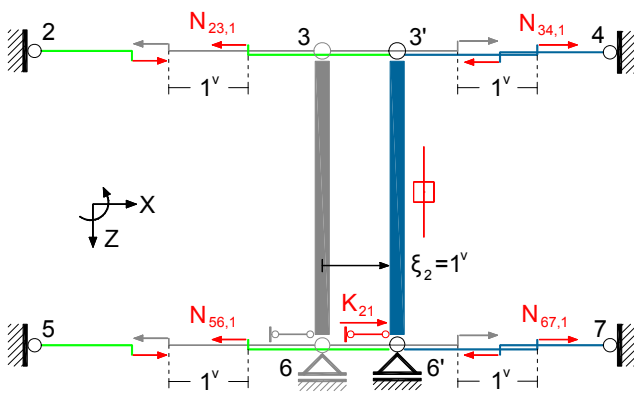
$$\Rightarrow K_{12} = -10000 \text{ kNm/m}$$

Σχήμα 10.5-3 Υπολογισμός του συντελεστή K_{12} με την ΑΔΕ.



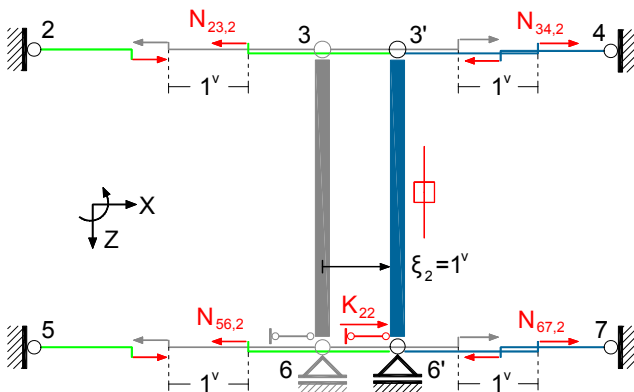
$$\begin{aligned}
 K_{20} \cdot 1^v - N_{23,0} \cdot 1^v + N_{34,0} \cdot 1^v - N_{56,0} \cdot 1^v + N_{67,0} \cdot 1^v + P \cdot 1^v &= 0 \\
 \Rightarrow K_{20} \cdot 1^v - 0 \cdot 1^v + 0 \cdot 1^v - 0 \cdot 1^v + 0 \cdot 1^v + 100 \cdot 1^v &= 0 \\
 \Rightarrow K_{20} &= -100 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Σχήμα 10.6-1 Υπολογισμός του συντελεστή K_{20} με την ΑΔΕ.



$$\begin{aligned}
 K_{21} \cdot 1^v - N_{23,1} \cdot 1^v + N_{34,1} \cdot 1^v - N_{56,1} \cdot 1^v + N_{67,1} \cdot 1^v &= 0 \\
 \Rightarrow K_{21} \cdot 1^v - \left(-\frac{2EA}{3}\right) \cdot 1^v + \frac{EA}{3} \cdot 1^v - 0 \cdot 1^v + 0 \cdot 1^v &= 0 \\
 \Rightarrow K_{21} &= -\frac{2EA}{3} - \frac{EA}{3} \\
 \Rightarrow K_{21} &= -10000 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Σχήμα 10.6-2 Υπολογισμός του συντελεστή K_{21} με την ΑΔΕ.



$$\begin{aligned}
 K_{22} \cdot 1^v - N_{23,2} \cdot 1^v + N_{34,2} \cdot 1^v - N_{56,2} \cdot 1^v + N_{67,2} \cdot 1^v &= 0 \\
 \Rightarrow K_{22} \cdot 1^v - \frac{EA}{6} \cdot 1^v + \left(-\frac{EA}{12}\right) \cdot 1^v - \frac{EA}{8} \cdot 1^v + \left(-\frac{EA}{4}\right) \cdot 1^v &= 0 \\
 \Rightarrow K_{22} \cdot 1^v - \frac{15EA}{24} \cdot 1^v &= 0 \\
 \Rightarrow K_{22} &= 6250 \text{ kN/m}
 \end{aligned}$$

Σχήμα 10.6-3 Υπολογισμός του συντελεστή K_{22} με την ΑΔΕ.

Βήμα 5. Κατάστρωση του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας και υπολογισμός των ξ_i

Οι εξισώσεις ισορροπίας εκφράζουν τη συνθήκη μηδενισμού των αντιδράσεων πάκτωσης και παγίωσης K_1, K_2 στον δεδομένο φορέα. Σύμφωνα με τα προηγηθέντα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned}
 K_{11} \cdot \xi_1 + K_{12} \cdot \xi_2 + K_{10} &= 0 \\
 K_{21} \cdot \xi_1 + K_{22} \cdot \xi_2 + K_{20} &= 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}
 40000 \cdot \xi_1 - 10000 \cdot \xi_2 + 700 &= 0 \\
 -10000 \cdot \xi_1 + 6250 \cdot \xi_2 - 100 &= 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned}
 \xi_1 &= -0.0225 \text{ rad} \\
 \xi_2 &= -0.02 \text{ m}
 \end{aligned} \right.$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Αξονικές δυνάμεις

Η αξονική δύναμη του κατακόρυφου στοιχείου 1-6 είναι ίση με το μηδέν, διότι (1) το στοιχείο δεν φορτίζεται από κάποιο κατακόρυφο (αξονικό) εξωτερικό φορτίο, και (2) οι τέσσερις οριζόντιες ράβδοι, που συνδέονται σε αυτό, έχουν μηδενικές τέμνουσες δυνάμεις. Οι τιμές των αξονικών δυνάμεων των τεσσάρων ράβδων του φορέα υπολογίζονται ακολούθως, με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας.

$$N_{23} = N_{23,0} + N_{23,1} \cdot \xi_1 + N_{23,2} \cdot \xi_2 = 0 + (-6666.67) \cdot (-0.0225) + 1666.67 \cdot (-0.02) = 116.67 \text{ kN}$$

$$N_{34} = N_{34,0} + N_{34,1} \cdot \xi_1 + N_{34,2} \cdot \xi_2 = 0 + 3333.33 \cdot (-0.0225) + (-833.33) \cdot (-0.02) = -58.33 \text{ kN}$$

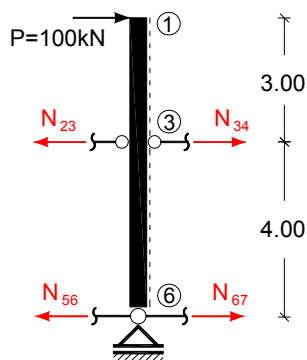
$$N_{56} = N_{56,0} + N_{56,1} \cdot \xi_1 + N_{56,2} \cdot \xi_2 = 0 + 0 \cdot (-0.0225) + 1250 \cdot (-0.02) = -25 \text{ kN}$$

$$N_{67} = N_{67,0} + N_{67,1} \cdot \xi_1 + N_{67,2} \cdot \xi_2 = 0 + 0 \cdot (-0.0225) + (-2500) \cdot (-0.02) = 50 \text{ kN}$$

Ροπές κάμψης

Ροπές κάμψης αναπτύσσονται μόνον στο απολύτως στερεό στοιχείο 1-6. Με γνωστές, πλέον, τις αξονικές δυνάμεις των ράβδων, ο υπολογισμός των M (όπως και των Q) του στοιχείου 1-6 μπορεί να γίνει πολύ απλά με απόσπασή του από τον υπόλοιπο φορέα και εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας (βλ. Σχ. 10.7). Η τιμή της ροπής στους κόμβους 1 και 6 είναι, προφανώς, ίση με το μηδέν, ενώ η τιμή της στον κόμβο 3 προκύπτει από την κατάστρωση της εξίσωσης ισορροπίας των ροπών για το τμήμα 1-3 ή 3-1:

$$M_{31} = M_{36} = -P \cdot L_2 = -100 \cdot 3 = -300 \text{ kNm}$$



Σχήμα 10.7 Υπολογισμός των M και Q του απολύτως στερεού στοιχείου 1-6.

Παρατήρηση:

Λόγω της άρθρωσης στον κόμβο 6, το άθροισμα των ροπών ως προς τον κόμβο αυτόν οφείλει να είναι μηδενικό (\rightarrow ανεξάρτητος έλεγχος!). Πράγματι:

$$\sum M_{(6)} = P \cdot 7.0 + (N_{34} - N_{23}) \cdot 4.0 = 100 \cdot 7.0 + (-58.33 - 116.67) \cdot 4.0 = 700 - 700 = 0$$

Τέμνουσες δυνάμεις

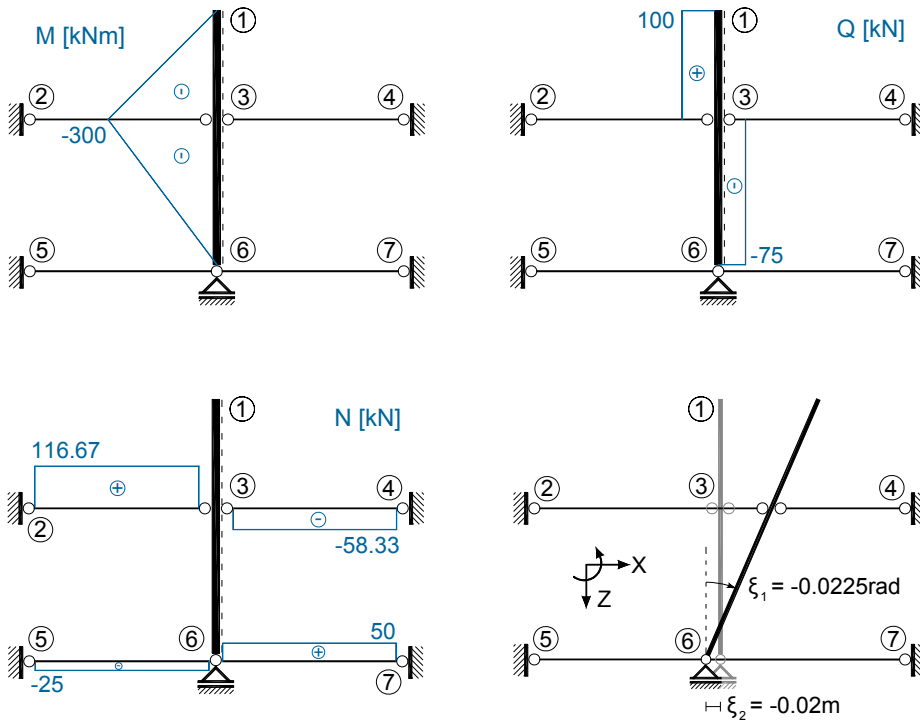
Οι τέμνουσες δυνάμεις του στοιχείου 1-6 προκύπτουν με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας δυνάμεων κατά X :

$$\sum P_x = 0 \text{ για το τμήμα } 3-1: P - Q_{31} = 0 \Rightarrow Q_{31} = P = 100 \text{ kN}$$

$$\sum P_x = 0 \text{ για τον κόμβο } 3: Q_{31} + N_{34} - N_{23} - Q_{36} = 0 \Rightarrow Q_{36} = -75 \text{ kN}$$

$$\sum P_x = 0 \text{ για τον κόμβο } 6: Q_{63} + N_{67} - N_{56} = 0 \Rightarrow Q_{63} = -75 \text{ kN}$$

Στο παρακάτω σχήμα 10.8 δίνονται τα διαγράμματα M , Q , N και η τελική παραμόρφωση του φορέα υπό το δεδομένο φορτίο.

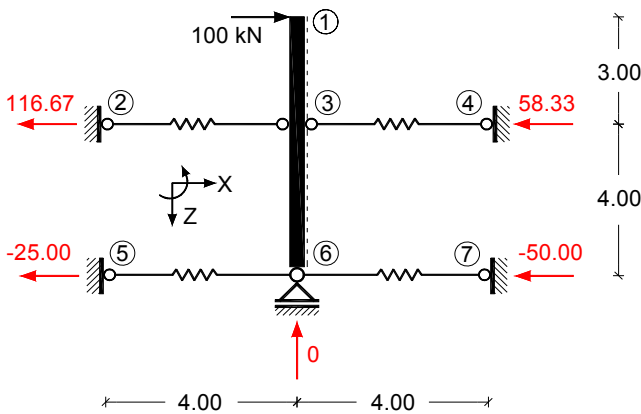


Σχήμα 10.8 Τα διαγράμματα M , Q , N και η παραμόρφωση του φορέα υπό την δεδομένη φόρτιση.

Η ορθότητα των αποτελεσμάτων ελέγχεται μερικώς με τους ακόλουθους ισορροπιακούς ελέγχους.

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολούθως διενεργούνται τρεις ισορροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (βλ. Σχ. 10.9).



$$\sum F_x = 100 + 25 + 50 - 116.67 - 58.33 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_6 = -(116.67 \cdot 4) - (58.33 \cdot 4) + (100 \cdot 7) = 0 \text{ kNm}$$

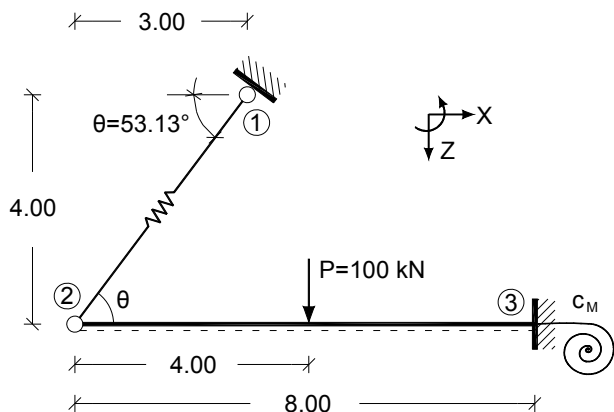
Σχήμα 10.9 Ισορροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Οι τρεις παραπάνω συνθήκες ισορροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισορροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Άσκηση 11

Εκφώνηση

Για τον φορέα του σχήματος 11.0 να υπολογιστούν με τη βοήθεια της ΜΜ (α) η βύθιση v_{z2} του κόμβου 2, (β) η αξονική δύναμη $N_{2,3}$ της δοκού 2-3, και (γ) η ροπή πάκτωσης M_3 .



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

$EI = 100000 \text{ kNm}^2$

$EA_{23} \rightarrow GA_s \rightarrow \infty$

$EA_{12} = 12500 \text{ kN}$

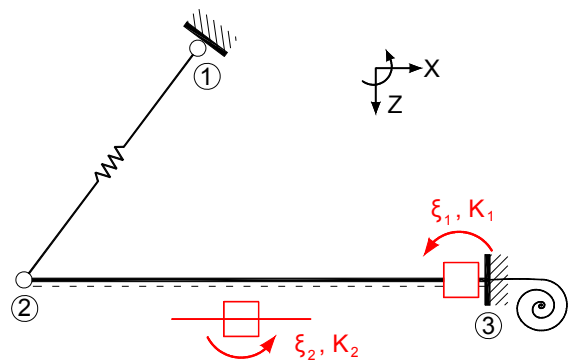
$c_M = 50000 \text{ kNm/rad}$

Σχήμα 11.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Λόγω της πεπερασμένης δυστέλειας της ράβδου 1-2, ο κόμβος 2 έχει δυνατότητα μετακίνησης κατά την έννοια του άξονα Z. Επιπλέον, η ύπαρξη του στροφικού ελατηρίου στον κόμβο 3, προσδίδει στον συγκεκριμένο κόμβο δυνατότητα ελαστικής στροφής.

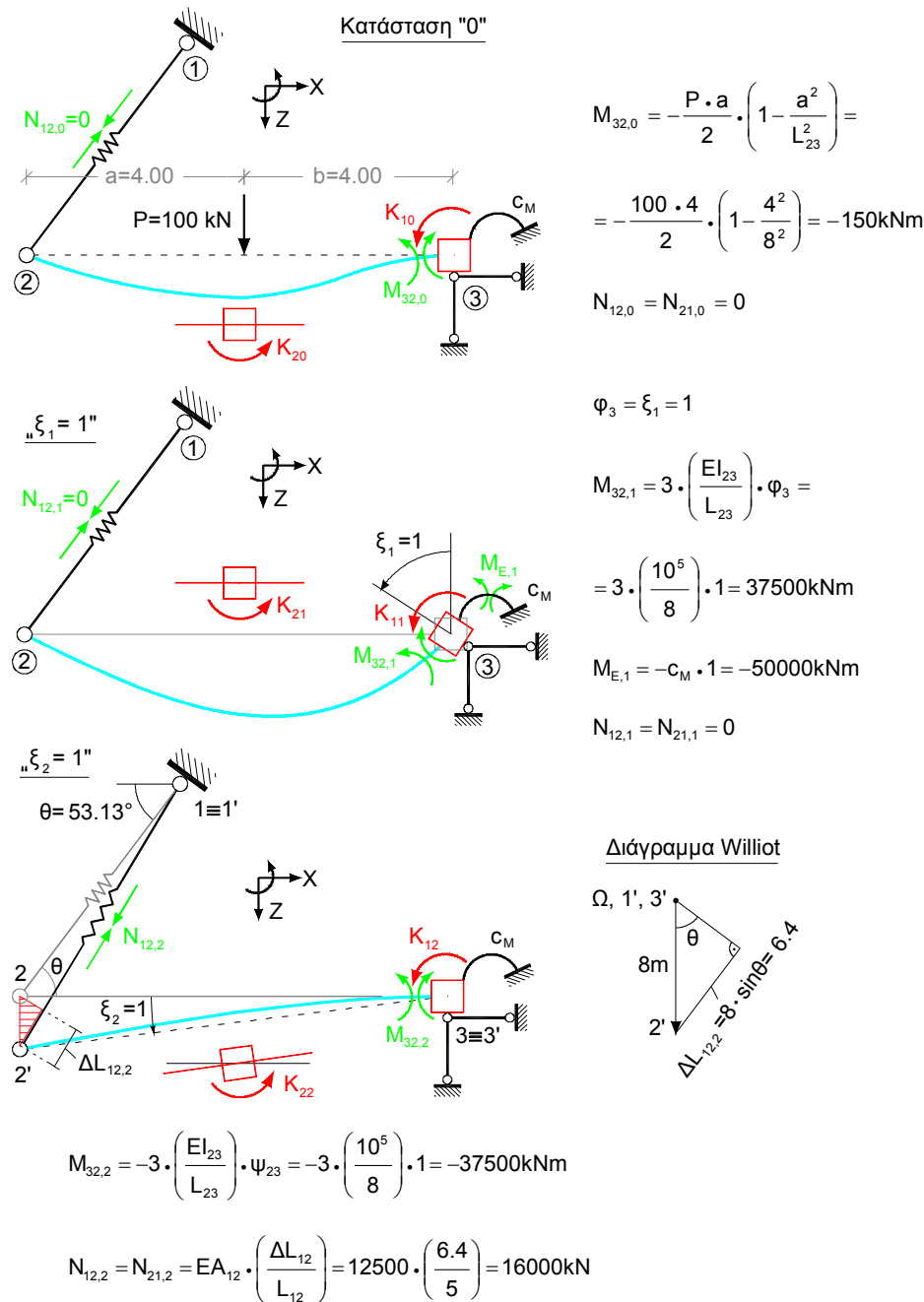


Σχήμα 11.1 Το ΓΚΣ του φορέα.

Με βάση τα παραπάνω και με δεδομένη τη διαθεσιμότητα πινάκων μονόπακτης δοκού, το ΓΚΣ του δεδομένου φορέα προκύπτει με τη δικινητή πάκτωση του κόμβου 3 και την παγίωση της στροφής της χορδής της δοκού 2-3 (Σχ. 11.1).

Βήμα 2. Οι καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ "

Στο ακόλουθο σχήμα 11.2 δίνονται η παραμόρφωση και τα αναπτυσσόμενα εντασιακά μεγέθη της κατάστασης εξωτερικής φόρτισης "0" και των δύο μοναδιαίων καταστάσεων μετακίνησης " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ " στο ΓΚΣ.



Σχήμα 11.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στις καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ ", και " $\xi_2=1$ ".

Παρατηρήσεις:

1. Για τον συμβολισμό των στροφικών ελατηρίων και τη σχετική σύμβαση θετικών προσήμων για την αναπτυσσόμενη σε αυτά στρεπτική ροπή βλ. Άσκηση 7, Σχ. 7.1. Σύμφωνα με αυτήν, η ροπή $M_{E,1}$ που αναπτύσσεται στο στροφικό ελατήριο στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " έχει αρνητικό πρόσημο, θεωρούμενη ως αντιστεκόμενη στη θετική καταναγκασμένη στροφή του κόμβου 3.
2. Υπενθυμίζεται, ότι για λόγους καλύτερης εποπτείας, η κλίμακα σχεδίασης των μετακινήσεων είναι, κατά κανόνα, διαφορετική από την κλίμακα σχεδίασης του φορέα. Έτσι, η βύθιση $v_{2,2}$ του κόμβου 2 στην κατάσταση " $\xi_2=1$ " είναι αριθμητικά ίση με $v_{2,2}=1.8\text{m}$, όσο, δηλαδή, και το μήκος της δοκού 2-3, σχεδιάστηκε, όμως, πολύ μικρότερη για να φαίνεται καλύτερα η παραμορφωμένη κατάσταση. Παράλληλα, όμως, επισημαίνεται, ότι δεν πρέπει να ξενίζει το μεγάλο μέγεθος των μετακινήσεων που εμφανίζονται στις μοναδιαίες αυτές καταστάσεις, διότι δεν πρόκειται για πραγματικές καταστάσεις έντασης και παραμόρφωσης, αλλά για ενδιάμεσες βοηθητικές καταστάσεις στα πλαίσια της υπολογιστικής διαδικασίας. Για όλες αυτές τις μετακινήσεις ισχύουν οι κανόνες της απειροστής γεωμετρίας (μικρές μετακινήσεις, $\sin\varphi=\varphi$, $\cos\varphi=1$, κτλ).

3. Η αξονική δύναμη $N_{12,2}$ της ράβδου 1-2 στην κατάσταση " $\xi_2=1$ " είναι θετική, διότι η ράβδος μηκώνεται και, άρα, εφελκύεται. Είναι σαφές ότι η αξονική αυτή δύναμη είναι σταθερή σε όλο το μήκος της ράβδου και, επομένως, για τα δύο άκρα της ισχύει $N_{12,2}=N_{21,2}$.
4. Οι αξονικές δυνάμεις $N_{12,0}$ και $N_{12,1}$ της ράβδου 1-2 είναι, προφανώς, ίσες με το μηδέν, διότι στις καταστάσεις "0" και " $\xi_1=1$ " δεν αλλάζει το μήκος της ράβδου.
5. Υπενθυμίζεται ότι, εφόσον οι επιβαλλόμενες μοναδιαίες στροφές $\xi_1=\varphi_3=1$ και $\xi_2=\varphi_{23}=1$ είναι αδιάστατες (Σημ.: Κανονικά οι στροφές μειούνται σε [rad]), οι μονάδες μέτρησης των αναπτυσσόμενων στις καταστάσεις " $\xi_n=1$ " ($n=1,2$) ροπών είναι όχι [kNm], αλλά [kNm/rad]. Αντίστοιχα, οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις μετριούνται σε [kN/rad]. Εντούτοις, όπως επανειλημμένα αναφέρθηκε σε προηγούμενες ασκήσεις (βλ. π.χ. σχετικές παρατηρήσεις στο βήμα 3 της Άσκησης 1 και της Άσκησης 4), κατά κανόνα παραλείπεται το '/rad', οπότε οι ροπές δίνονται σε [kNm] και οι δυνάμεις σε [kN].

Βήμα 3. Υπολογισμός των συντελεστών φορτίου K_{i0} και στιβαρότητας K_{ij} ($i, j = 1, 2$)

Ο υπολογισμός των συντελεστών K_{10} , K_{11} , K_{12} , οι οποίοι εκφράζουν τη ροπή-αντίδραση της δικινητής πάκτωσης του κόμβου 3, θα γίνει με τη βοήθεια των εξισώσεων ισορροπίας των ροπών στον συγκεκριμένο κόμβο για κάθε μία από τις τρεις καταστάσεις "0", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ ". Με τη βοήθεια των δεδομένων του σχήματος 11.2 προκύπτουν:

$$K_{10} + M_{32,0} = 0 \Rightarrow K_{10} = -M_{32,0} \Rightarrow K_{10} = -150 \text{ kNm}$$

$$K_{11} + M_{E,1} - M_{32,1} = 0 \Rightarrow K_{11} = -M_{E,1} + M_{32,1} = -(-50000) + 37500 = 87500 \text{ kNm}$$

$$K_{12} - M_{32,2} = 0 \Rightarrow K_{12} = M_{32,2} \Rightarrow K_{12} = -37500 \text{ kNm}$$

Ο υπολογισμός των συντελεστών K_{20} , K_{21} , K_{22} , οι οποίοι εκφράζουν τη ροπή-αντίδραση της παγίωσης της χορδής της δοκού 2-3, θα γίνει με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων.

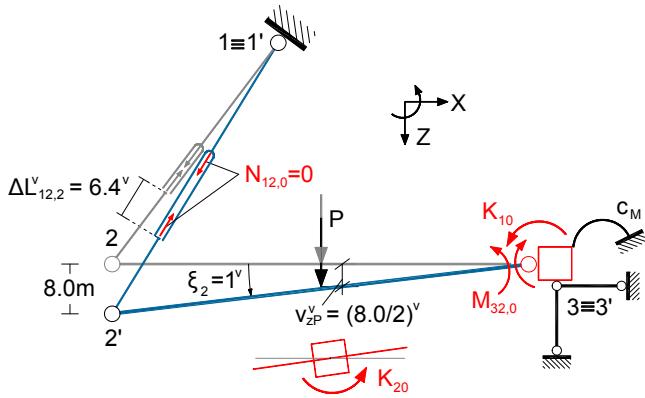
Προς τούτο, το ΓΚΣ μετατρέπεται κατ' αρχάς σε κινηματική αλυσίδα με τέτοιο τρόπο, ώστε κατά τη θεωρούμενη δυνατή μετακίνηση να παράγεται έργο μόνο από τον εκάστοτε ζητούμενο συντελεστή K_{2i} . Η μετατροπή του ΓΚΣ σε κινηματική αλυσίδα απαιτεί αφενός την εισαγωγή μιας καμπτικής άρθρωσης^{*)} στον κόμβο 3 και αφετέρου την εισαγωγή μιας αξονικής άρθρωσης^{**)} στη ράβδο 1-2, όπως φαίνεται στο σχήμα 11.3.

Ταυτόχρονα, προκειμένου να διατηρηθεί η εκάστοτε θεωρούμενη κατάσταση έντασης, θα πρέπει να προσαχθούν στις θέσεις των εισαγομένων αρθρώσεων οι εσωτερικές δυνάμεις/ροπές (ζεύγη δυνάμεων/ροπών) που προϋπάρχουν στο ΓΚΣ στην εξεταζόμενη κατάσταση.

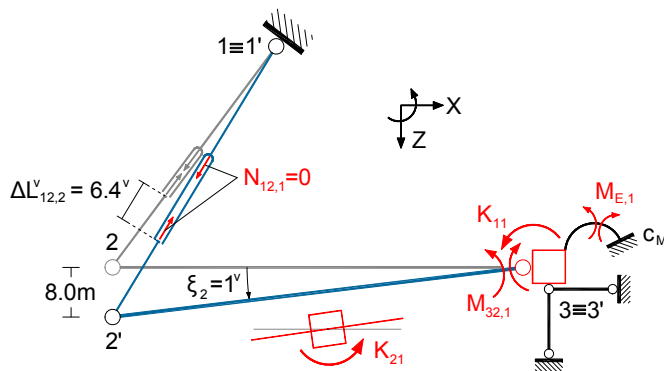
Για τον υπολογισμό, π.χ., του συντελεστή K_{20} αθροίζονται τα δυνατά έργα που εκτελούν οι εξωτερικές και οι εσωτερικές δυνάμεις/ροπές της κατάστασης "0" κατά τη δυνατή μετακίνηση " $\xi_2=1$ ". Θέτοντας, σύμφωνα με την αρχή των δυνατών έργων, το άθροισμα αυτό ίσο με το μηδέν, προκύπτει ο ζητούμενος συντελεστής K_{20} . Η διαδικασία υπολογισμού γίνεται με τη βοήθεια του σχήματος 11.3.

*) Η καμπτική άρθρωση δεν επιτρέπει τη μεταβίβαση καμπτικών ροπών, ενώ επιτρέπει τη μεταβίβαση τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων. Παράλληλα, επιτρέπει τη διαφορετική στροφή στα άκρα των συντρεχουσών στην άρθρωση δοκών, δηλαδή την ανάπτυξη μιας διαφοράς στροφών $\Delta\varphi$ ('γόνατο').

***) Η αξονική άρθρωση δεν επιτρέπει τη μεταβίβαση αξονικών δυνάμεων, ενώ επιτρέπει τη μεταβίβαση ροπών κάμψης και τεμνουσών δυνάμεων. Παράλληλα, επιτρέπει τη διαφορετική αξονική μετακίνηση των σημείων εκατέρωθεν αυτής, δηλαδή την ανάπτυξη μιας διαφοράς αξονικής μετατόπισης $\Delta u = \Delta L$ ('χάσμα').

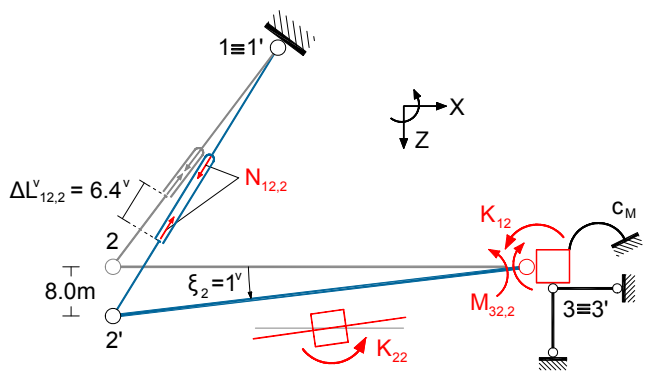


$$W_e^v = K_{20} \cdot 1^v + M_{32,0} \cdot 1^v + P \cdot v_{2P}^v = 0 \Rightarrow K_{20} \cdot 1^v - 150 \cdot 1^v + 100 \cdot (8/2)^v = 0 \Rightarrow K_{20} = -250 \text{ kNm}$$



$$W_e^v = K_{21} \cdot 1^v + M_{32,1} \cdot 1^v = 0 \Rightarrow K_{21} \cdot 1^v + 37500 \cdot 1^v = 0 \Rightarrow K_{21} = -37500 \text{ kNm}$$

(Ελεγχος: Ο συντελεστής K_{21} προκύπτει, ως όφειλε, ίσος με τον συντελεστή K_{12})



$$W_e^v = K_{22} \cdot 1^v + M_{32,2} \cdot 1^v - N_{21,2} \cdot \Delta L_{12,2}^v = 0 \Rightarrow K_{22} \cdot 1^v - 37500 \cdot 1^v - 16000 \cdot 6.4^v = 0 \Rightarrow K_{22} = 37500 + 102400 \Rightarrow K_{22} = 139900 \text{ kNm}$$

Σχήμα 11.3 Υπολογισμός των συντελεστών K_{20} , K_{21} , K_{22} με την $\Delta \Delta E$.

Βήμα 4. Κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας και υπολογισμός των ξ_1 και ξ_2

Ο υπολογισμός των υπεραριθμών γεωμετρικών μεγεθών ξ_1 , ξ_2 επιτυγχάνεται μέσω της συνθήκης μηδενισμού των αντιδράσεων πάκτωσης K_1 και παγίωσης K_2 , οι εκφράσεις των οποίων προκύπτουν με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας:

$$\left. \begin{matrix} K_1 = 0 \\ K_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} K_{11} \cdot \xi_1 + K_{12} \cdot \xi_2 + K_{10} = 0 \\ K_{21} \cdot \xi_1 + K_{22} \cdot \xi_2 + K_{20} = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 87500 \cdot \xi_1 - 37500 \cdot \xi_2 - 150 = 0 \\ -37500 \cdot \xi_1 + 139900 \cdot \xi_2 - 250 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} \xi_1 = 2.802 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \\ \xi_2 = 2.5381 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \end{matrix} \right.$$

Βήμα 5. Υπολογισμός της βύθισης v_{z2} , της αξονικής δύναμης N_{2-3} , και της ροπής M_3 .

Ο υπολογισμός της βύθισης v_{z2} του κόμβου 2 θα γίνει με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας:

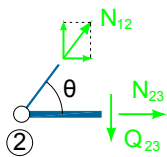
$$v_{z2} = v_{z2,0} + v_{z2,1} \cdot \xi_1 + v_{z2,2} \cdot \xi_2 = 0 + 0 \cdot (2.802 \cdot 10^{-3}) + 8 \cdot (2.5381 \cdot 10^{-3}) = 20.30 \cdot 10^{-3} \text{ m} \Rightarrow v_{z2} = 2.03 \text{ cm}$$

Με τον ίδιο τρόπο γίνεται ο υπολογισμός της ροπής πάκτωσης M_3 :

$$M_3 = M_{3,0} + M_{3,1} \cdot \xi_1 + M_{3,2} \cdot \xi_2 = M_{32,0} + M_{32,1} \cdot \xi_1 + M_{32,2} \cdot \xi_2 =$$

$$= -150 + 37500 \cdot (2.802 \cdot 10^{-3}) + (-37500) \cdot (2.5381 \cdot 10^{-3}) = -140.10 \text{ kNm}$$

Τέλος, η αξονική δύναμη της δοκού 2-3 υπολογίζεται από την κατάστρωση της συνθήκης ισορροπίας των οριζοντίων δυνάμεων του κόμβου 2:

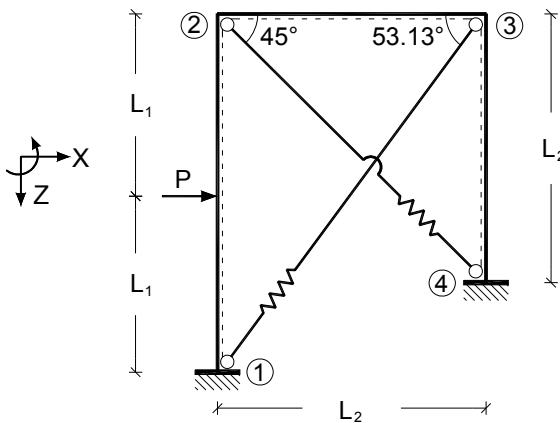


$$\left. \begin{aligned} N_{23} + N_{12} \cdot \cos\theta &= 0 \Rightarrow N_{23} = -N_{12} \cdot \cos\theta \\ N_{12} = N_{12,0} + N_{12,1} \cdot \xi_1 + N_{12,2} \cdot \xi_2 &= 0 + 0 \cdot \xi_1 + N_{12,2} \cdot \xi_2 = 40.61 \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_{23} = -24.37 \text{ kN}$$

Άσκηση 12

Εκφώνηση

Έστω ο φορέας του σχήματος 12.0, ο οποίος προκύπτει από τον φορέα της Άσκησης 9 με την προσθήκη των διαγώνιων ράβδων 1-3 και 2-4, οι οποίες θεωρούμε ότι έχουν πεπερασμένη δυστένεια και δεν συνδέονται στο σημείο διασταύρωσής τους. Να μελετηθεί η επιρροή των προστιθέμενων ράβδων σε όλα τα επί μέρους βήματα της διαδικασίας επίλυσης με τη ΜΜ, καθώς και στην τελική παραμορφωσιακή και εντασιακή κατάσταση του φορέα της Άσκησης 8 (μετακινήσεις κόμβων και διαγράμματα ροπών M και τεμνουσών Q).



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία: $L_1=4.00m, L_2=6.00m$

Φόρτιση: $P=40kN$

Δοκοί/Στόλοι

$EI_{12}=EI_{34}=10^5 kNm^2$

$EI_{23}=6 \cdot 10^4 kNm^2$

$EA \rightarrow GA_s \rightarrow \infty$

Ράβδοι:

$EA_{13}=EA_{24}=10^5 kN$

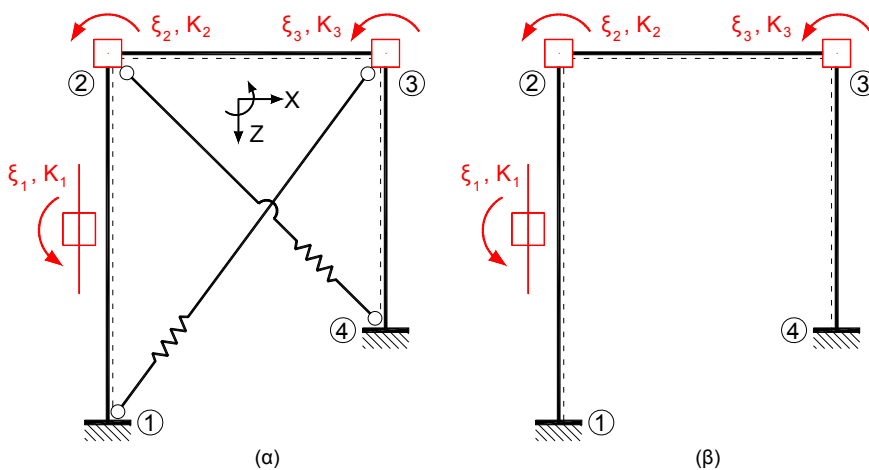
Σχήμα 12.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

Τα σημεία διαφοροποίησης που προκύπτουν από την προσθήκη των διαγώνιων ράβδων 1-3 και 2-4 στον φορέα της Άσκησης 9, θα παρουσιαστούν ξεχωριστά για κάθε ένα από τα βήματα της διαδικασίας επίλυσης με τη ΜΜ.

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Η προσθήκη των διαγώνιων ράβδων δεν μεταβάλλει το ΓΚΣ του δεδομένου φορέα (βλ. Σχ. 12.1(α)) σε σχέση με το ΓΚΣ του φορέα της Άσκησης 9 (βλ. Σχ. 12.1(β)), διότι αυτές - λόγω της πεπερασμένης τους δυστένειας - δεν δεσμεύουν καμία από τις υφιστάμενες ελευθερίες κίνησης του πλαισίου 1-2-3-4. Σημειώνεται, ότι αν οι ράβδοι 1-3 και 2-4 ήταν ατελείς, ο φορέας θα μετατρέποταν σε υπερπάγιο σύστημα, με αποτέλεσμα αφενός τη μείωση των αγνώστων γεωμετρικών μεγεθών σε δύο (στροφή κόμβου 2 και στροφή κόμβου 3) και αφετέρου την αδυναμία υπολογισμού των αξονικών του δυνάμεων.

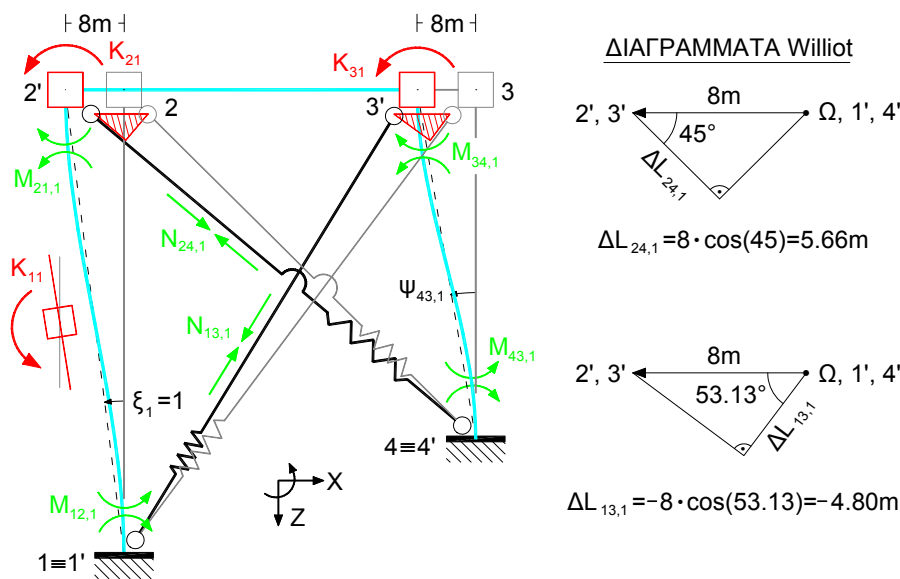


Σχήμα 12.1 Το ΓΚΣ (α) του δεδομένου φορέα και (β) του φορέα της Άσκησης 8.

Βήμα 2. Υπολογισμός μεγεθών έντασης/μετακίνησης των καταστάσεων "ξ_i=1" (i=1,2,3)

Οι μοναδιαίες καταστάσεις "ξ₂=1" και "ξ₃=1" δεν επηρεάζονται από την προσθήκη των δύο ράβδων, διότι λόγω της (εξ ορισμού) αρθρωτής σύνδεσης των τελευταίων στους κόμβους 2 και 3, δεν αναπτύσσεται καμία επιπλέον αντίσταση κατά τον μοναδιαίο στροφικό καταναγκασμό των κόμβων αυτών.

Αντίθετα, η προσθήκη των δύο ράβδων επηρεάζει την κατάσταση "ξ₁=1" (βλ. Σχ. 12.2). Στην κατάσταση αυτή, η μετατόπιση των κόμβων 2 και 3 οδηγεί σε μεταβολή του μήκους των προστεθεισών ράβδων, στις οποίες, έτσι, αναπτύσσονται αξονικές δυνάμεις. Οι τελευταίες μεταβάλλουν μεν την εντασιακή κατάσταση του ΓΚΣ, χωρίς, όμως, να επηρεάζουν καθόλου τις καμπτικές ροπές των στύλων και του ζυγώματος, οι οποίες εξαρτώνται μόνον από τις οριζόντιες μετατοπίσεις των κόμβων 2 και 3. Συνεπώς, οι συντελεστές K₂₁ και K₃₁ του μητρώου στιβαρότητας, που εξαρτώνται από τις επικόμβιες ροπές στην κατάσταση "ξ₁=1", παραμένουν ανεπηρέαστοι από την ύπαρξη των δύο διαγώνιων ράβδων. Αντίθετα, επηρεάζεται ο συντελεστής K₁₁, όπως θα φανεί πιο κάτω.



(Το αρνητικό πρόσημο του ΔL_{13,1} οφείλεται στο γεγονός ότι η ράβδος 1-3 θλίβεται)

$$\psi_{12,1} = \xi_1 = 1 \quad \psi_{34,1} = \frac{v_{x4} - v_{x3}}{L_{34}} = \frac{0 - (-8)}{6} = \frac{4}{3} = 1.33$$

$$M_{12,1} = M_{21,1} = -6 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{12,1} = -6 \cdot \left(\frac{10^5}{8} \right) \cdot 1 = -75000 \text{ kNm}$$

$$M_{43,1} = M_{34,1} = -6 \cdot \left(\frac{EI_{34}}{L_{34}} \right) \cdot \psi_{34,1} = -6 \cdot \left(\frac{10^5}{6} \right) \cdot \left(\frac{4}{3} \right) = -133333.33 \text{ kNm}$$

$$N_{13,1} = N_{31,1} = EA_{13} \cdot \left(\frac{\Delta L_{13,1}}{L_{13}} \right) = 10^5 \cdot \left(\frac{-4.8}{10} \right) = -48000 \text{ kN}$$

$$N_{24,1} = N_{42,1} = EA_{13} \cdot \left(\frac{\Delta L_{24,1}}{L_{24}} \right) = 10^5 \cdot \left(\frac{5.66}{8.485} \right) = 66666.67 \text{ kN}$$

Σχήμα 12.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "ξ₁=1".

Βιντεοπαρουσίαση του σχήματος 12.2: <https://www.youtube.com/watch?v=e7wH5zY1sGA&feature=youtu.be>

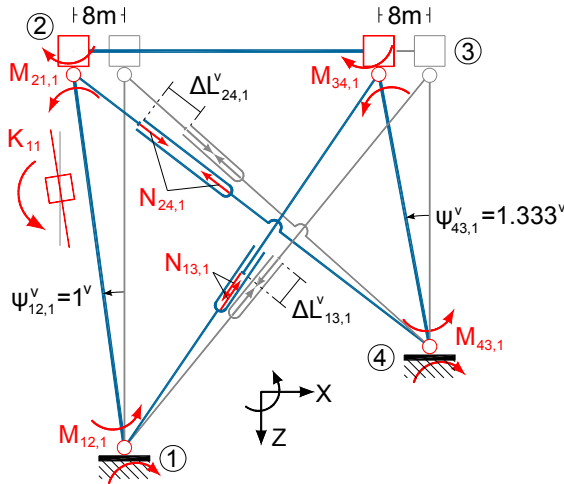
Βήμα 3. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"

Στην κατάσταση "0" όλοι οι κόμβοι παραμένουν αμετακίνητοι και επομένως οι ράβδοι 1-3 και 2-4 παραμένουν άτονες. Άρα, η ένταση που αναπτύσσεται στο ΓΚΣ του φορέα του σχήματος 12.0 δεν διαφοροποιείται από την ένταση που αναπτύσσεται στο ΓΚΣ του φορέα της Άσκησης 9 (βλ. Σχ. 9.2).

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης

- Συντελεστές στιβαρότητας K_{i1}, K_{i2}, K_{i3} ($i=1,2,3$)

Ήδη στο προηγούμενο βήμα 2 συμπεράναμε ότι ο μόνος συντελεστής στιβαρότητας που επηρεάζεται από την προσθήκη των δύο διαγώνιων ράβδων είναι ο K_{11} . Ο υπολογισμός του K_{11} γίνεται με εφαρμογή της ΑΔΕ (βλ. Σχ. 12.3).



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{11} \cdot 1^v + (M_{12,1} + M_{21,1}) \cdot \psi_{12,1}^v + (M_{34,1} + M_{43,1}) \cdot \psi_{43,1}^v - N_{24,1} \cdot |\Delta L_{24,1}^v| + N_{13,1} \cdot |\Delta L_{13,1}^v| = 0 \Rightarrow$$

$$K_{11} \cdot 1^v + (-2 \cdot 75000) \cdot 1^v + (-2 \cdot 133333.33) \cdot 1.333^v - 66666.67 \cdot 5.66^v + (-48000) \cdot 4.8^v = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{11} = 1113079 \text{ kNm}$$

Σχήμα 12.3 Κατάσταση " $\xi_1=1^v$ " με ένταση από την κατάσταση " $\xi_1=1$ " για τον υπολογισμό του K_{11} .

Το προηγούμενο συμπέρασμα, ότι δηλαδή η προσθήκη των δύο διαγώνιων ράβδων μεταβάλλει μόνον τον συντελεστή στιβαρότητας K_{11} , μπορεί να τεκμηριωθεί και με διαφορετικό τρόπο ως εξής: Εφόσον, όπως προαναφέρθηκε, η προσθήκη των δύο ράβδων επηρεάζει μόνον την κατάσταση " $\xi_1=1$ " αφήνοντας ανεπηρέαστες τις καταστάσεις " $\xi_2=1$ " και " $\xi_3=1$ ", οι μόνιμοι συντελεστές στιβαρότητας K_{ij} που θα μπορούσαν να μεταβληθούν, είναι οι συντελεστές που αφορούν στην κατάσταση " $\xi_1=1$ ", δηλαδή οι K_{11}, K_{21} , και K_{31} . Λόγω, όμως, της συμμετρίας του μητρώου στιβαρότητας, προκύπτει το λογικό συμπέρασμα, ότι οι συντελεστές K_{21}, K_{31} δεν μεταβάλλονται από την προσθήκη των ράβδων, διότι είναι αντιστοίχως ίσοι με τους συντελεστές K_{12}, K_{13} , οι οποίοι υπολογίζονται από τις μοναδιαίες καταστάσεις " $\xi_2=1$ " και " $\xi_3=1$ " που παραμένουν αμετάβλητες. Επομένως, ο μόνος συντελεστής που μεταβάλλεται έναντι του φορέα της Άσκησης 8, είναι ο K_{11} .

- Συντελεστές φόρτισης K_{i0} ($i=1,2,3$)

Εφόσον η ένταση στην κατάσταση "0" παραμένει αμετάβλητη, οι φορτιστικοί όροι K_{i0} παραμένουν και αυτοί αμετάβλητοι. Επομένως, οι τιμές τους είναι ίδιες όπως και στην Άσκηση 8:

$$K_{10} = 160 \quad K_{20} = -40 \quad K_{30} = 0$$

Βήμα 5. Επίλυση του συστήματος εξισώσεων και υπολογισμός των ξ_i ($i=1,2,3$)

Το σύστημα των τριών επιλυσών εξισώσεων ισορροπίας δίνεται παρακάτω. Από την επίλυσή του προκύπτουν οι τιμές των τριών αγνώστων μεγεθών μετακίνησης ξ_i ($i=1,2,3$), ενώ σε αγκύλες δίνονται τα αντίστοιχα μεγέθη της Άσκησης 9 (δηλ. του πλαισίου χωρίς τις διαγώνιες ράβδους):

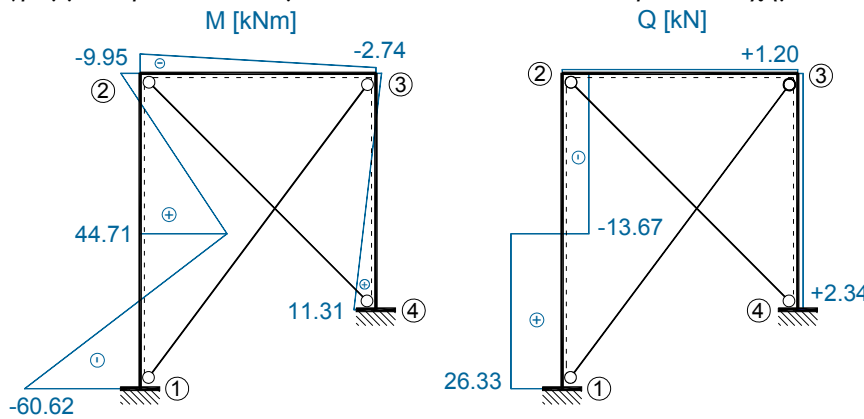
$$\left. \begin{aligned} K_1 = 0 & \Rightarrow 1113079 \cdot \xi_1 - 75000 \cdot \xi_2 - 133333.33 \cdot \xi_3 + 160 = 0 \\ K_2 = 0 & \Rightarrow -75000 \cdot \xi_1 + 90000 \cdot \xi_2 + 20000 \cdot \xi_3 - 40 = 0 \\ K_3 = 0 & \Rightarrow -133333.33 \cdot \xi_1 + 20000 \cdot \xi_2 + 106666.67 \cdot \xi_3 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \xi_1 &= -1.49 \cdot 10^{-4} [-4.41 \cdot 10^{-4}] \text{ rad} \\ \xi_2 &= 3.77 \cdot 10^{-4} [2.08 \cdot 10^{-4}] \text{ rad} \\ \xi_3 &= -2.57 \cdot 10^{-4} [-5.91 \cdot 10^{-4}] \text{ rad} \end{aligned}$$

Από τη σύγκριση προκύπτει ότι, η προσθήκη των δύο διαγώνιων ράβδων μειώνει δραστικά τη στροφή χορδής του στύλου 1-2 (από 4.41 σε 1.49 [rad/10⁴]) και, κατά συνέπεια, την οριζόντια μετατόπιση του πλαισίου, όπως άλλωστε ήταν και διαισθητικά αναμενόμενο. Παράλληλα, η μεν στροφή ξ_3 του κόμβου 3 μειώνεται επίσης, ενώ, αντίθετα, αυξάνει η στροφή ξ_2 του κόμβου 2, γεγονός που δεν μπορεί να προβλεφθεί διαισθητικά με βεβαιότητα, αλλά απαιτεί υπολογισμό.

Όσον αφορά στις αναμενόμενες μεταβολές των εντασιακών μεγεθών, μπορεί να ειπωθεί ότι, λόγω της μείωσης της οριζόντιας μετατόπισης, θα πρέπει να αναμένονται γενικώς μικρότερες ροπές, χωρίς, όμως, αυτό να αποκλείει την αύξηση των ροπών σε ορισμένους κόμβους του φορέα. Πράγματι, η γενική αυτή εκτίμηση επαληθεύεται από τους υπολογισμούς (βλ. ακόλουθο Βήμα 6, Σχ. 12.4 και Σχ. 12.5).

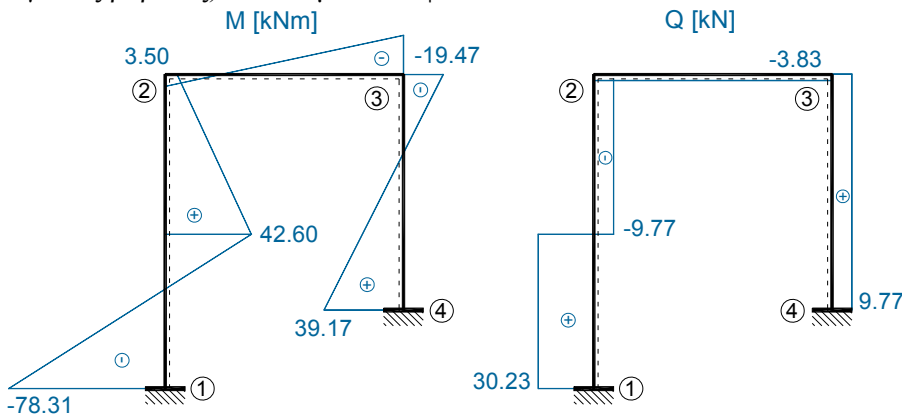
Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Ακολουθώντας τη διαδικασία, που περιγράφηκε αναλυτικά στις προηγούμενες ασκήσεις, προκύπτουν τα διαγράμματα ροπών και τεμνουσών που δίνονται στο παρακάτω σχήμα 12.4.



Σχήμα 12.4 Διαγράμματα M και Q του δεδομένου φορέα (πλαίσιο με διαγώνιες ράβδους πεπερασμένης δυστένειας) υπό την δεδομένη φόρτιση (= φόρτιση α της Άσκησης 9).

Για λόγους σύγκρισης παρατίθενται ακολούθως τα διαγράμματα του φορέα της Άσκησης 9 (χωρίς διαγώνιες ράβδους) του επόμενου κεφαλαίου:



Σχήμα 12.5 Διαγράμματα M και Q του φορέα της Άσκησης 9 (πλαίσιο χωρίς διαγώνιες ράβδους) για την φόρτιση α.

Με βάση τα παραπάνω μπορεί να ειπωθεί ότι, η τοποθέτηση διαγώνιων ράβδων οπωσδήποτε οδηγεί σε μείωση των οριζοντίων μετατοπίσεων (σύγκρ. τις τιμές της ξ_1), ενώ η επίδραση στις ροπές και τις τέμνουσες των στύλων και του ζυγώματος του πλαισίου μπορεί να είναι, γενικώς, μειωτική, αν και όχι σε κάθε περίπτωση.

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 5

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
- [2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙ: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Κεφάλαιο 6

Φορείς με λοξά στοιχεία

Σύνοψη

Η άσκηση 13, που περιέχεται στο κεφάλαιο αυτό, αφορά στον υπολογισμό ενός κινητού πλαισίου με κεκλιμένους (λοξούς) στύλους για τέσσερις διαφορετικές φορτίσεις: εξωτερικά συνεχή φορτία q , ομοιόμορφη θερμο-κρασιακή φόρτιση t , ανομοιόμορφη θερμοκρασιακή φόρτιση Δt και καταναγκασμένες (κατακόρυφες και οριζόντιες) μετατοπίσεις v_z , v_x των στηρίξεων. Στόχος της άσκησης είναι, -εκτός από την εμβάθυνση στον χειρισμό καταναγκασμών-, η περαιτέρω εξοικείωση με τη χρησιμοποίηση του διαγράμματος Williot (που το συναντήσαμε ήδη στις προηγούμενες Ασκήσεις 11 και 12) για τον προσδιορισμό της παραμορφωμένης κατάστασης σε φορείς με λοξά στοιχεία.

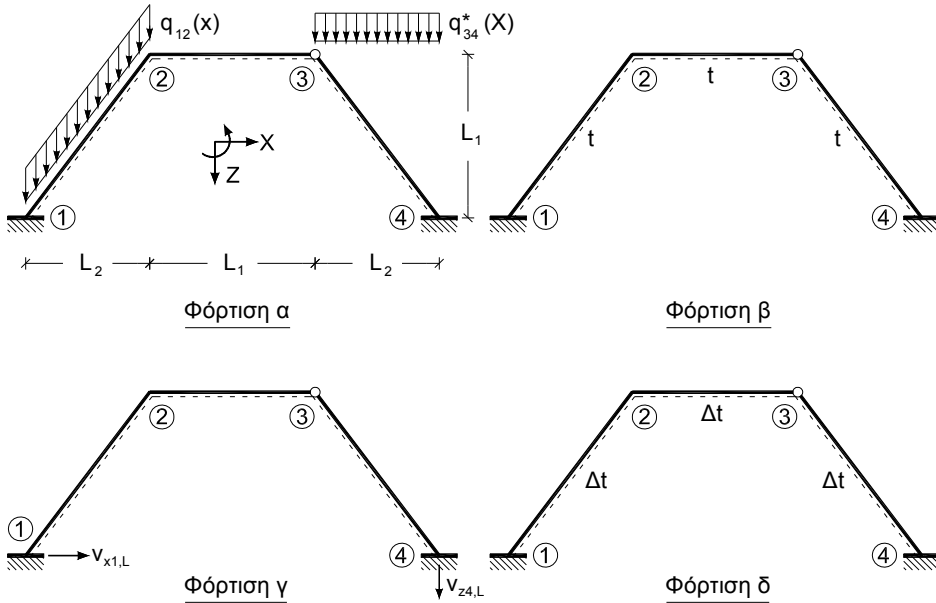
Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων (βλ. π.χ. [2]-κεφ.3) και, οπωσδήποτε, η μελέτη των ασκήσεων των προηγούμενων κεφαλαίων 1 έως 5. Σε κάθε περίπτωση, απαιτείται καλή γνώση της Στατικής των ισοστατικών φορέων, καθώς και επαρκής εξοικείωση με τη Μέθοδο των υπεραριθμών δυνάμεων για υπερστατικούς φορείς (βλ. π.χ. [1] και [2]-κεφ.2, και λοιπή σχετική βιβλιογραφία της παραγράφου Ε7).

Άσκηση 13

Εκφώνηση

Ο φορέας του σχήματος 13.0 να επιλυθεί με τη ΜΜ και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα M, Q, N για τις τέσσερις δεδομένες περιπτώσεις φόρτισης α, β, γ και δ.

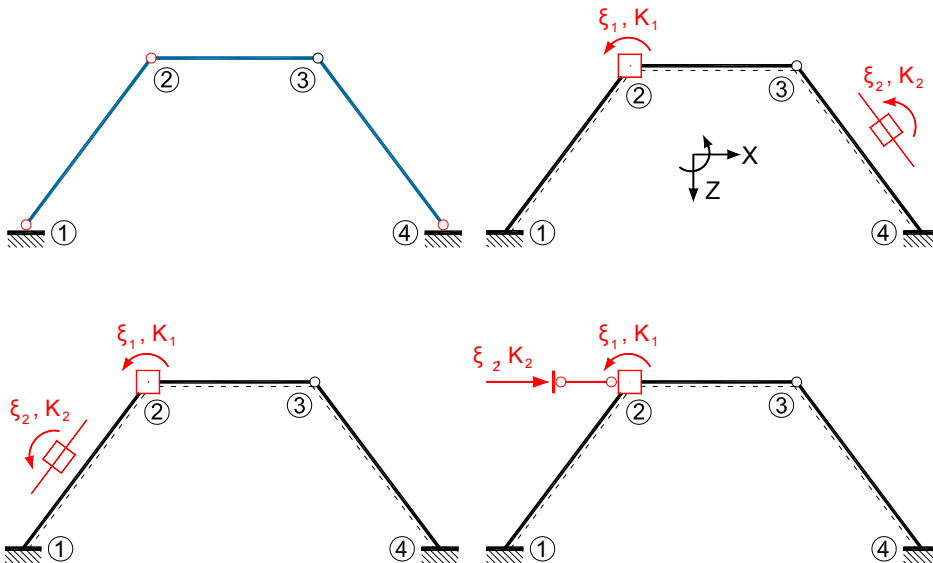


Σχήμα 13.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Ο σχηματισμός των ράβδων του φορέα είναι μία μονοβάθμια κινηματική αλυσίδα και, επομένως, ο φορέας είναι μία φορά κινητός. Με δεδομένη τη δυνατότητα χρήσης πινάκων για μονόπακτες δοκούς, δεν είναι απαραίτητη η δέσμευση των στροφών εκατέρωθεν του κόμβου 3. Έτσι, το ΓΚΣ του φορέα προκύπτει πακτώνοντας δικινητά τον κόμβο 2 και τη στροφή της χορδής της δοκού 1-2 (Σχ. 13.1). Εναλλακτικά, αντί της δικινητής πάκτωσης της χορδής της δοκού 1-2, θα μπορούσε, είτε να πακτωθεί δικινητά η στροφή της χορδής της δοκού 3-4, είτε να παγιωθεί οριζοντίως ο κόμβος 2.



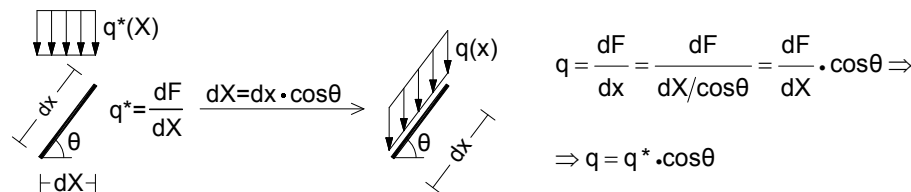
Σχήμα 13.1 Ο σχηματισμός ράβδων του φορέα και τρεις διαφορετικές παραλλαγές του ΓΚΣ.

Οι διαφοροποιήσεις, που προκύπτουν από τις διαφορετικές επιλογές του ΓΚΣ, αφορούν μόνο στα ενδιάμεσα βήματα υπολογισμού (π.χ. επηρεάζονται τα διαγράμματα Williot) και δεν επηρεάζουν, βεβαίως, τα τελικά αποτελέσματα.

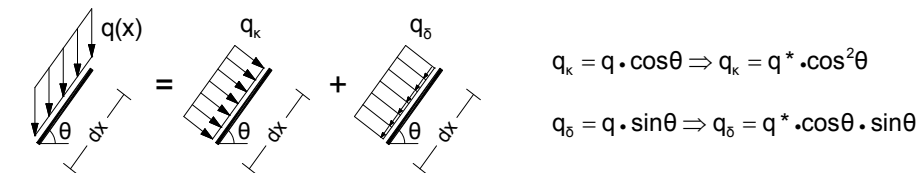
Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"

Φόρτιση α – Ομοιόμορφο φορτίο q στα στοιχεία 1-2 και 3-4

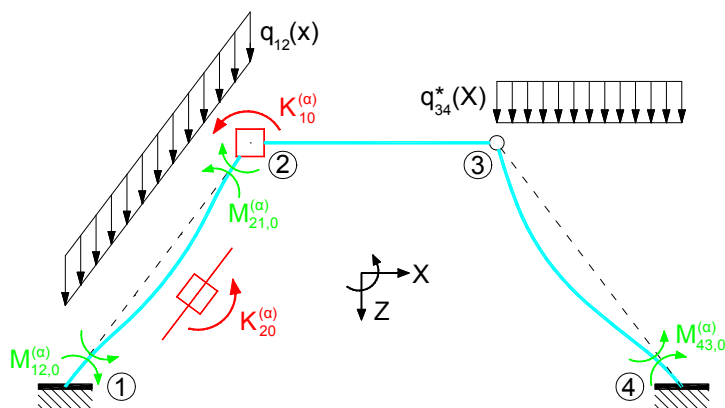
Για τον υπολογισμό των ροπών μιας κεκλιμένης δοκού είναι σκόπιμο να γίνεται πρώτα αναγωγή της δεδομένης φόρτισης από μονάδες μήκους κατακόρυφης προβολής $q^*(X)$ σε μονάδες μήκους $q(x)$ κατά την έννοια του κεκλιμένου (τοπικού) άξονα x της δοκού, σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:



Εν συνεχεία, γίνεται ανάλυση της φόρτισης $q(x)$ σε δύο συνιστώσες: μία κάθετη q_k και μία παράλληλη q_δ στον άξονα x της δοκού, σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:



Προφανώς, ροπές προκαλεί μόνον η κάθετη συνιστώσα $q_k = q \cdot \cos\theta = q^* \cdot \cos^2\theta$, ενώ η συνιστώσα q_δ προκαλεί αποκλειστικά αξονική ένταση. Με τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε για τη δοκό 3-4: $q_{k34} = q^*_{34} \cdot \cos^2\theta = 20\text{kN/m} \cdot (3/5)^2 = 7.2\text{kN/m}$. Αντίστοιχα, για τις ροπές της κεκλιμένης δοκού 1-2 παίρνουμε: $q_{k12} = q_{12} \cdot \cos\theta = 15\text{kN/m} \cdot (3/5) = 9\text{kN/m}$. Σύμφωνα με όλα αυτά, προκύπτουν, βάσει των Πινάκων 1 και 2α, οι ροπές στα άκρα των στοιχείων (Σχ. 13.2-1).

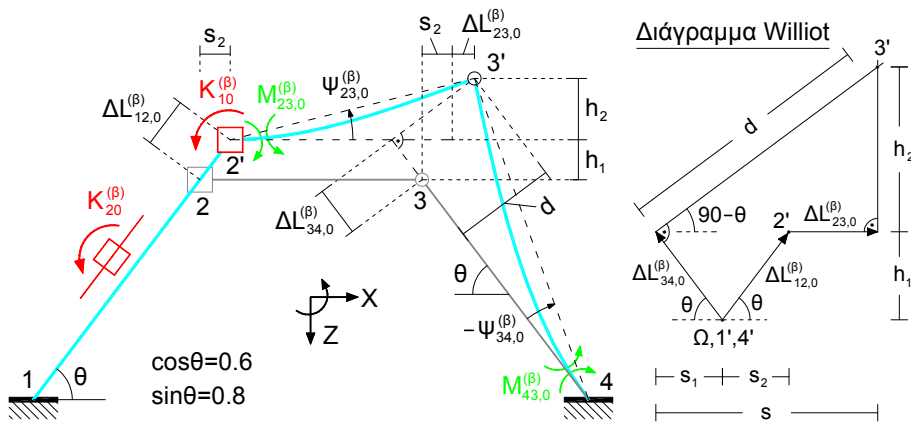


$$M_{12,0}^{(a)} = \frac{q_{k12} \cdot L_{12}^2}{12} = \frac{9 \cdot 5^2}{12} = 18.75\text{kNm} \quad M_{21,0}^{(a)} = -M_{12,0}^{(a)} = -18.75\text{kNm}$$

$$M_{43,0}^{(a)} = -\frac{q_{k34} \cdot L_{12}^2}{8} = -\frac{7.2 \cdot 5^2}{8} = -22.50\text{kNm}$$

Σχήμα 13.2-1 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" – Φόρτιση α.

Φόρτιση β – Ομοιόμορφη αύξηση θερμοκρασίας t όλων των στοιχείων του φορέα



Γεωμετρικά στοιχεία:

$$\Delta L_{12,0}^{(\beta)} = \alpha_t \cdot L_{12} \cdot t = (1.2 \cdot 10^{-5}) \cdot 5 \cdot 20 = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta L_{34,0}^{(\beta)} = \alpha_t \cdot L_{34} \cdot t = (1.2 \cdot 10^{-5}) \cdot 5 \cdot 20 = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta L_{23,0}^{(\beta)} = \alpha_t \cdot L_{23} \cdot t = (1.2 \cdot 10^{-5}) \cdot 4 \cdot 20 = 9.6 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$s_1 = \Delta L_{34,0}^{(\beta)} \cdot \cos\theta = 1.2 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6 = 7.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$s_2 = \Delta L_{12,0}^{(\beta)} \cdot \cos\theta = 1.2 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6 = 7.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\Rightarrow s = s_1 + s_2 + \Delta L_{23,0}^{(\beta)} = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Από το διάγραμμα Williot
παίρνουμε:

$$d = s / \sin\theta = 2.4 \cdot 10^{-3} / 0.8 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$h_2 = d \cdot \cos\theta = 3 \cdot 10^{-3} \cdot 0.6 = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Και, επομένως, λαμβάνοντας υπόψη
ότι

$$\Delta L_{23,0}^{(\beta)} \ll L_{23} \text{ και } \Delta L_{34,0}^{(\beta)} \ll L_{34} :$$

$$\psi_{23,0}^{(\beta)} = \frac{v_{z2} - v_{z3}}{L_{23} + \Delta L_{23,0}^{(\beta)}} = \frac{(-h_1) - (-h_1 - h_2)}{L_{23} + \Delta L_{23,0}^{(\beta)}} = \frac{h_2}{L_{23} + \Delta L_{23,0}^{(\beta)}} \approx \frac{h_2}{L_{23}} = \frac{1.8 \cdot 10^{-3}}{4} = 4.5 \cdot 10^{-4}$$

$$\psi_{34,0}^{(\beta)} = -\frac{d}{L_{34} + \Delta L_{34,0}^{(\beta)}} \approx -\frac{d}{L_{34}} = -\frac{3 \cdot 10^{-3}}{5} = -6 \cdot 10^{-4}$$

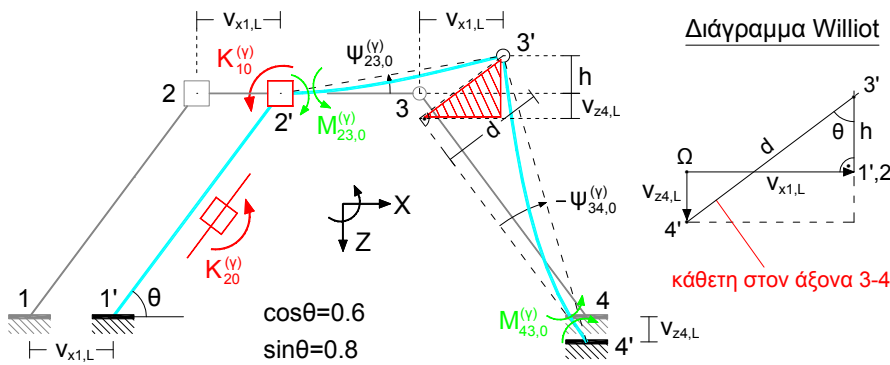
Έτσι, για τις ροπές προκύπτουν: (βλ. Πίνακες 2α και 2β):

$$M_{23,0}^{(\beta)} = -3 \cdot (EI_{23}/L_{23}) \cdot \psi_{23,0}^{(\beta)} = -3 \cdot (10^5/4) \cdot (4.5 \cdot 10^{-4}) = -33.75 \text{ kNm}$$

$$M_{43,0}^{(\beta)} = -3 \cdot (EI_{34}/L_{34}) \cdot \psi_{34,0}^{(\beta)} = -3 \cdot (10^5/5) \cdot (-6 \cdot 10^{-4}) = 36.00 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.2-2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" – Φόρτιση β.

Φόρτιση γ – Καταναγκασμένες μετακινήσεις των στηρίξεων του φορέα



Λαμβάνοντας υπόψη ότι, κατά την επιβολή της οριζόντιας καταναγκασμένης μετατόπισης $v_{x1,L}$ του κόμβου 1, η δοκός 1-2 πρέπει να υποστεί, λόγω της δέσμευσης της χορδής της, παράλληλη μετάθεση, παίρνουμε από το διάγραμμα Williot τα εξής:

$$d = v_{x1,L} / \sin\theta \Rightarrow d = 0.1 / 0.8 = 0.125\text{m}$$

$$h + v_{z4,L} = d \cdot \cos\theta \Rightarrow h = 0.125 \cdot 0.6 - 0.03 \Rightarrow h = 0.045\text{m}$$

Και, επομένως:

$$\psi_{23,0}^{(y)} = \frac{v_{z2} - v_{z3}}{L_{23}} = \frac{0 - (-h)}{L_{23}} = \frac{h}{L_{23}} = 0.01125, \quad \psi_{34,0}^{(y)} = -\frac{d}{L_{34}} = -0.025$$

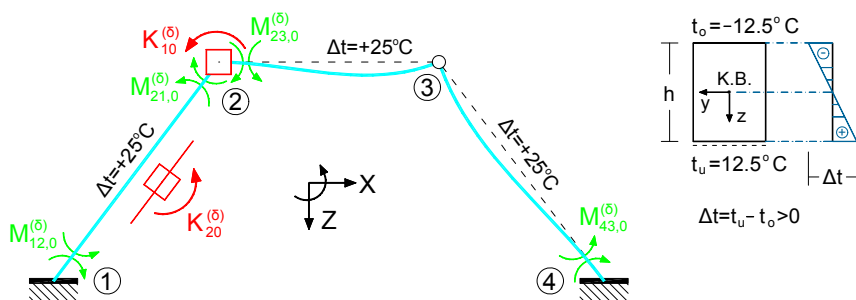
Για τις ροπές προκύπτουν, έτσι, οι τιμές (βλ. Πίνακες 2α και 2β):

$$M_{23,0}^{(y)} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \psi_{23,0}^{(y)} = -3 \cdot \left(\frac{10^5}{4} \right) \cdot (0.01125) = -843.75\text{kNm}$$

$$M_{43,0}^{(y)} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{34}}{L_{34}} \right) \cdot \psi_{34,0}^{(y)} = -3 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot (-0.025) = 1500\text{kNm}$$

Σχήμα 13.2-3 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση “0” – Φόρτιση γ.

Φόρτιση δ – Ανομοιόμορφες θερμοκρασιακές μεταβολές των στοιχείων του φορέα



$$M_{12,0}^{(5)} = EI_{12} \cdot \alpha_t \cdot (\Delta t / h) = 10^5 \cdot (1.2 \cdot 10^{-5}) \cdot (25 / 0.6) = 50\text{kNm}$$

$$M_{21,0}^{(5)} = -EI_{12} \cdot \alpha_t \cdot (\Delta t / h) = -10^5 \cdot (1.2 \cdot 10^{-5}) \cdot (25 / 0.6) = -50\text{kNm}$$

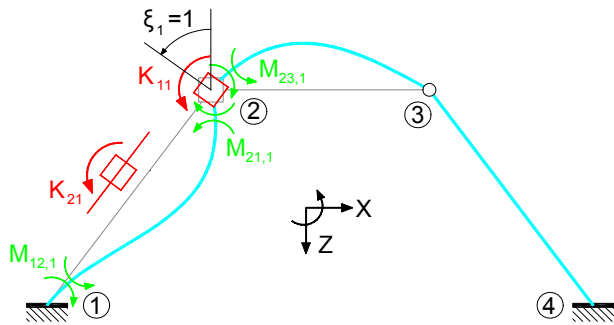
$$M_{23,0}^{(5)} = (3/2) \cdot EI_{23} \cdot \alpha_t \cdot (\Delta t / h) = (3/2) \cdot 10^5 \cdot (1.2 \cdot 10^{-5}) \cdot (25 / 0.6) = 75\text{kNm}$$

$$M_{43,0}^{(5)} = -(3/2) \cdot EI_{43} \cdot \alpha_t \cdot (\Delta t / h) = -(3/2) \cdot 10^5 \cdot (1.2 \cdot 10^{-5}) \cdot (25 / 0.6) = -75\text{kNm}$$

Σχήμα 13.2-4 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση “0” – φόρτιση δ.

Βήμα 3. Υπολογισμός μεγεθών έντασης / μετακίνησης των καταστάσεων "ξ_i=1" (i=1,2)

- Κατάσταση "ξ₁=1"



$$(\varphi_2 = \xi_1 = 1)$$

$$M_{12,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot 1 = 40000 \text{ kNm}$$

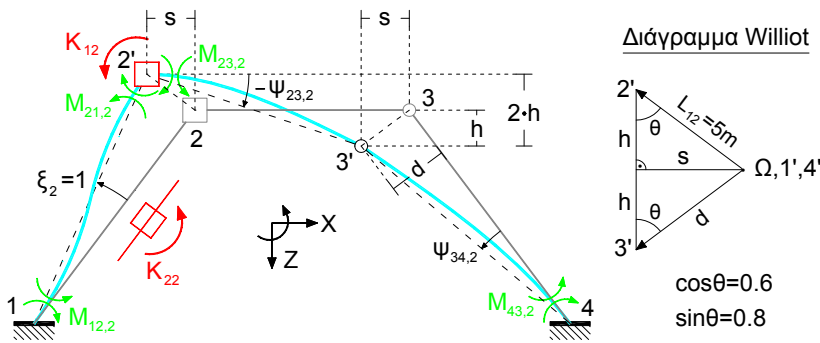
$$M_{21,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 4 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot 1 = 80000 \text{ kNm}$$

$$M_{23,1} = 3 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 3 \cdot \left(\frac{10^5}{4} \right) \cdot 1 = 75000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.3 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "ξ₁=1".

- Κατάσταση "ξ₂=1"

Για τον προσδιορισμό των τελικών θέσεων 2' και 3' των κόμβων 2 και 3 στην κατάσταση "ξ₂=1" χρησιμοποιούμε το διάγραμμα Williot (βλ. Σχ. 13.4, δεξιά).



Γεωμετρικά στοιχεία:

$$s = 5 \cdot \sin\theta = 5 \cdot 0.8 = 4\text{m} \quad h = 5 \cdot \cos\theta = 5 \cdot 0.6 = 3\text{m} \quad d = \frac{h}{\cos\theta} = \frac{3}{0.6} = 5\text{m}$$

$$\psi_{12,2} = \xi_2 = 1 \quad \psi_{23,2} = \frac{v_{22} - v_{23}}{L_{23}} = \frac{-h - h}{L_{23}} = \frac{-6}{4} = -1.5 \quad \psi_{34,2} = \frac{d}{L_{34}} = \frac{5}{5} = 1$$

Ροπές (βλ. Πίνακες 1, 2α και 2β):

$$M_{12,2} = M_{21,2} = -6 \cdot \left(\frac{EI_{12}}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{12,2} = -6 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot 1 = -120000 \text{ kNm}$$

$$M_{23,2} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{23}}{L_{23}} \right) \cdot \psi_{23,2} = -3 \cdot \left(\frac{10^5}{4} \right) \cdot (-1.5) = 112500 \text{ kNm}$$

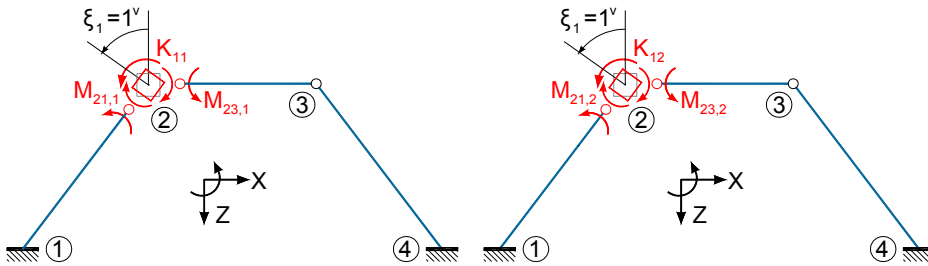
$$M_{43,2} = -3 \cdot \left(\frac{EI_{34}}{L_{34}} \right) \cdot \psi_{34,2} = -3 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot 1 = -60000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.4 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "ξ₂=1".

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης

- Συντελεστές στιβαρότητας K_{i1}, K_{i2} ($i=1,2$)

Ο υπολογισμός θα γίνει με εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων (Σχ. 13.5 και 13.6).



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{11} \cdot 1^v - (M_{21,1} + M_{23,1}) \cdot 1^v = 0$$

$$K_{11} - (80000 + 75000) = 0$$

$$\Rightarrow K_{11} = 155000 \text{ kNm}$$

(α)

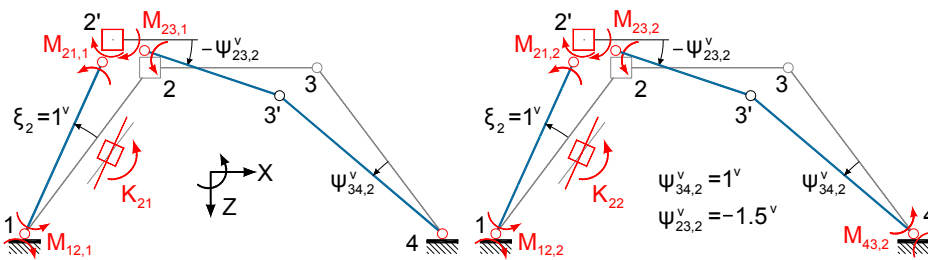
$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{12} \cdot 1^v - (M_{21,2} + M_{23,2}) \cdot 1^v = 0$$

$$K_{12} - (-120000 + 112500) = 0$$

$$\Rightarrow K_{12} = -7500 \text{ kNm}$$

(β)

Σχήμα 13.5 (α) Κατάσταση " $\xi_1=1^v$ " με ένταση, λόγω " $\xi_1=1^v$ " για τον υπολογισμό του K_{11} ,
(β) Κατάσταση " $\xi_1=1^v$ " με ένταση, λόγω " $\xi_2=1^v$ " για τον υπολογισμό του K_{12} .



$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{21} \cdot 1^v + (M_{12,1} + M_{21,1}) \cdot \psi_{12,2}^v - M_{23,1} \cdot (-\psi_{23,2}^v) = 0$$

$$K_{21} + (40000 + 80000) \cdot 1^v - 75000 \cdot 1.5^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{21} = -7500 \text{ kNm}$$

(α)

$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{22} \cdot 1^v + (M_{12,2} + M_{21,2}) \cdot \psi_{12,2}^v - M_{23,2} \cdot (-\psi_{23,2}^v) +$$

$$+ M_{43,2} \cdot \psi_{43,2}^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{22} + (-2 \cdot 120000) \cdot 1^v - 112500 \cdot 1.5^v +$$

$$+ (-60000) \cdot 1^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{22} = 468750 \text{ kNm}$$

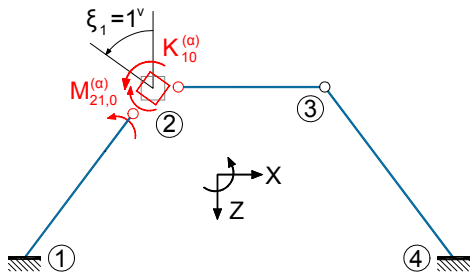
(β)

Σχήμα 13.6 (α) Κατάσταση " $\xi_2=1^v$ " με ένταση λόγω " $\xi_1=1^v$ " για τον υπολογισμό του K_{21} ,
(β) Κατάσταση " $\xi_2=1^v$ " με ένταση λόγω " $\xi_2=1^v$ " για τον υπολογισμό του K_{22} .

- Συντελεστές φόρτισης K_{10} και K_{20}

Ο υπολογισμός των συντελεστών φόρτισης (φορτιστικών όρων) γίνεται, ακολούθως, για κάθε μία από τις τέσσερις δεδομένες περιπτώσεις φόρτισης του φορέα ξεχωριστά (βλ. Σχ. 13.7-1 έως Σχ. 13.10-2).

Φόρτιση α – Καταναμημένες φορτίσεις στοιχείων 1-2 και 3-4

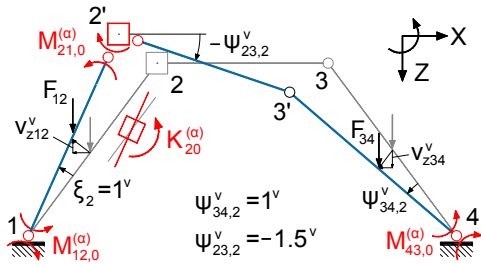


$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{10}^{(a)} \cdot 1^v - M_{21,0}^{(a)} \cdot 1^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{10}^{(a)} - (-18.75) = 0$$

$$\Rightarrow K_{10}^{(a)} = -18.75 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.7-1 Κατάσταση " $\xi_1=1^v$ " με ένταση από την κατάσταση "0", για τον υπολογισμό του φορτιστικού όρου $K_{10}^{(a)}$ - Φόρτιση α



$$F_{12} = q_1 \cdot L_{12} = 15 \cdot 5 = 75 \text{ kN} \quad F_{34} = q_2 \cdot L_{2-3} = 20 \cdot 3 = 60 \text{ kN}$$

$$v_{z12}^v = -(L_{12}/2) \cdot 1^v \cdot \cos\theta = -(5/2) \cdot 1^v \cdot 0.6 = -1.5 \text{ m}$$

$$v_{z34}^v = (L_{34}/2) \cdot 1^v \cdot \cos\theta = 5/2 \cdot 1^v \cdot 0.6 = 1.5 \text{ m}$$

$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{20}^{(a)} \cdot 1^v + (M_{12,0}^{(a)} + M_{21,0}^{(a)}) \cdot 1^v + M_{43,0}^{(a)} \cdot \psi_{34,2}^v + F_{34} \cdot v_{z34}^v + F_{12} \cdot v_{z12}^v = 0$$

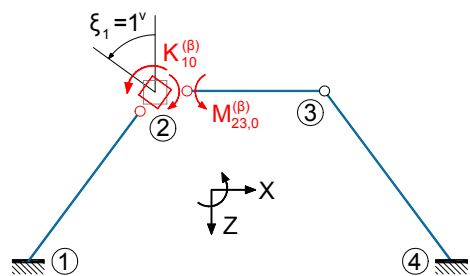
$$K_{20}^{(a)} \cdot 1^v + (18.75 - 18.75) \cdot 1^v + (-22.5) \cdot 1^v + 60 \cdot 1.5^v + 75 \cdot (-1.5^v) = 0 \Rightarrow K_{20}^{(a)} = 45 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.7-2 Κατάσταση " $\xi_2=1^v$ " με ένταση από την κατάσταση "0", για τον υπολογισμό του φορτιστικού όρου $K_{20}^{(a)}$ - Φόρτιση α.

Παρατηρήσεις:

1. Οι δυνάμεις F_{12} και F_{34} , είναι οι συνισταμένες των ομοιόμορφων φορτίων των στοιχείων 1-2 και 3-4, αντίστοιχα, και το σημείο εφαρμογής τους βρίσκεται στο μέσον των στοιχείων.
2. Το δυνατό έργο των δυνάμεων F_{12} και F_{34} , υπολογίζεται πολλαπλασιάζοντας την τιμή τους με την κατακόρυφη συνιστώσα του διανύσματος μετακίνησης του σημείου εφαρμογής τους.

Φόρτιση β - Ομοιόμορφη αύξηση θερμοκρασίας t όλων των στοιχείων του φορέα



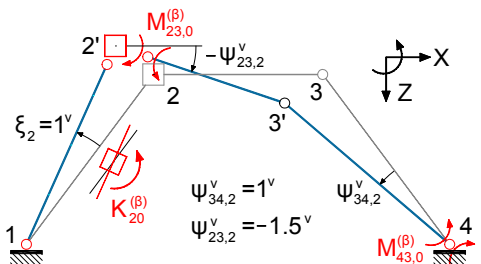
$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{10}^{(\beta)} \cdot 1^v - M_{23,0}^{(\beta)} \cdot 1^v = 0$$

$$K_{10}^{(\beta)} - (-33.75) = 0$$

$$\Rightarrow K_{10}^{(\beta)} = -33.75 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.8-1 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση "0", για τον υπολογισμό του φορτιστικού όρου $K_{10}^{(\beta)}$ - Φόρτιση β.



$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

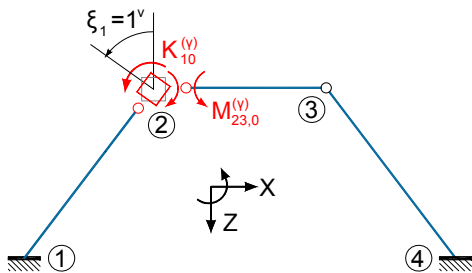
$$K_{20}^{(\beta)} \cdot 1^v - M_{23,0}^{(\beta)} \cdot (-\psi_{23,2}^v) + M_{43,0}^{(\beta)} \cdot \psi_{34,2}^v = 0$$

$$K_{20}^{(\beta)} \cdot 1^v - (-33.75) \cdot 1.5^v + 36.00 \cdot 1^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{20}^{(\beta)} = -86.625 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.8-2 Κατάσταση $\xi_2=1^v$ με ένταση από την κατάσταση "0", για τον υπολογισμό του φορτιστικού όρου $K_{20}^{(\beta)}$ - Φόρτιση β.

Φόρτιση γ – Καταναγκασμένες μετακινήσεις των στηρίξεων του φορέα



$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{10}^{(v)} \cdot 1^v - M_{23,0}^{(v)} \cdot 1^v = 0$$

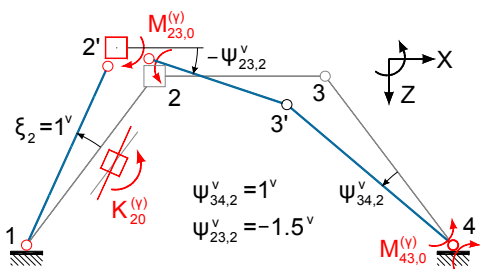
$$K_{10}^{(v)} - (-843.75) = 0$$

$$\Rightarrow K_{10}^{(v)} = -843.75 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.9-1 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση "0", για τον υπολογισμό του φορτιστικού όρου $K_{10}^{(v)}$ – Φόρτιση γ.

Σημείωση:

Οι μετατοπίσεις των κόμβων 2 και 3, κατά την επιβολή της δυνατής μετακίνησης $\xi_2=1^v$, είναι ακριβώς ίδιες με εκείνες της («πραγματικής») κατάστασης " $\xi_2=1$ ", και δίνονται στο εκεί διάγραμμα Williot (Σχ. 13.4).



$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

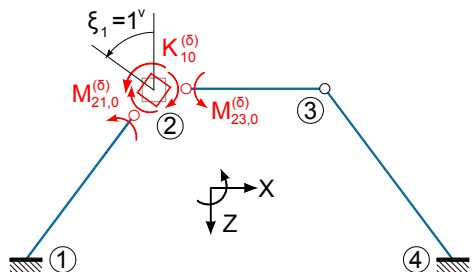
$$K_{20}^{(v)} \cdot 1^v - M_{23,0}^{(v)} \cdot (-\psi_{23,2}^v) + M_{43,0}^{(v)} \cdot \psi_{34,2}^v = 0$$

$$K_{20}^{(v)} \cdot 1^v - (-843.75) \cdot 1.5^v + 1500 \cdot 1^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{20}^{(v)} = -2765.625 \text{ kN m}$$

Σχήμα 13.9-2 Κατάσταση $\xi_2=1^v$ με ένταση από την κατάσταση "0", για τον υπολογισμό του φορτιστικού όρου $K_{20}^{(v)}$ – Φόρτιση γ.

Φόρτιση δ – Ανομοιόμορφες θερμοκρασιακές μεταβολές Δt των στοιχείων του φορέα



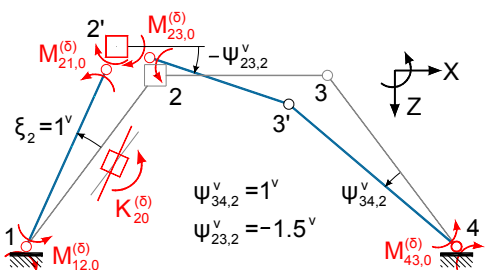
$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{10}^{(δ)} \cdot 1^v - (M_{21,0}^{(δ)} + M_{23,0}^{(δ)}) \cdot 1^v = 0$$

$$K_{10}^{(δ)} - (-50 + 75) = 0$$

$$\Rightarrow K_{10}^{(δ)} = 25 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.10-1 Κατάσταση $\xi_1=1^v$ με ένταση από την κατάσταση "0", για τον υπολογισμό του φορτιστικού όρου $K_{10}^{(δ)}$ – Φόρτιση δ.



$$W_e^v = 0 \Rightarrow$$

$$K_{20}^{(δ)} \cdot 1^v + (M_{12,0}^{(δ)} + M_{21,0}^{(δ)}) \cdot 1^v - M_{23,0}^{(δ)} \cdot (-\psi_{23,2}^v) + M_{43,0}^{(δ)} \cdot \psi_{34,2}^v = 0$$

$$K_{20}^{(δ)} \cdot 1^v + (50 - 50) \cdot 1^v - 75 \cdot 1.5^v + (-75) \cdot 1^v = 0 \Rightarrow K_{20}^{(δ)} = 187.5 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.10-2 Κατάσταση " $\xi_2=1^v$ " με ένταση από την κατάσταση "0", για τον υπολογισμό του φορτιστικού όρου $K_{20}^{(δ)}$ – Φόρτιση δ.

Βήμα 5. Κατάσρωση του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας και υπολογισμός των ξ

Το σύστημα των επιλυσιών εξισώσεων ισορροπίας έχει τη γενική μορφή:

$$[K_{ij}] \cdot [\xi_j] + [K_{i0}] = [0]$$

Το μητρώο στιβαρότητας K_{ij} ($i, j = 1, 2$) εξαρτάται μόνον από τα χαρακτηριστικά του φορέα και όχι από τη φόρτιση του. Αντίθετα, κάθε περίπτωση φόρτισης (α, β, γ και δ) έχει το δικό της διάνυσμα φορτίου ($K_{i0}^{(\alpha)}$, $K_{i0}^{(\beta)}$, $K_{i0}^{(\gamma)}$ και $K_{i0}^{(\delta)}$ αντίστοιχα). Έτσι, για τη συγκεκριμένη άσκηση, το σύστημα των εξισώσεων ισορροπίας θα πρέπει να επιλυθεί τέσσερις φορές. Από τις επιλύσεις αυτές, θα προκύψουν τα δύο υπεράριθμα γεωμετρικά μεγέθη ξ_1 και ξ_2 , για κάθε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις φόρτισης. Αν, όμως, το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός των ξ_1 και ξ_2 για τη συνδυασμένη δράση όλων των φορτιστικών αιτιών, τότε - λόγω της ισχύος της αρχής της επαλληλίας - επιλύεται το σύστημα των εξισώσεων μία μόνο φορά, με διάνυσμα φόρτισης ίσο με το άθροισμα των διανυσμάτων φόρτισης των τεσσάρων επιμέρους περιπτώσεων:

$$[K_{ij}] \cdot [\xi_j] + \{ [K_{i0}^{(\alpha)}] + [K_{i0}^{(\beta)}] + [K_{i0}^{(\gamma)}] + [K_{i0}^{(\delta)}] \} = [0]$$



$$\begin{bmatrix} 155000 & -7500 \\ -7500 & 468750 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} -18.75 \\ 45.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -33.75 \\ -86.625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -843.75 \\ -2765.625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 \\ 187.5 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Στον παρακάτω πίνακα 13.1 δίνονται οι τιμές των υπεραριθμών γεωμετρικών μεγεθών για κάθε μία από τις τέσσερις δεδομένες φορτίσεις καθώς και το άθροισμά τους (επαλληλία), που αντιστοιχεί στην ταυτόχρονη δράση των τεσσάρων φορτίσεων.

	Φόρτιση α	Φόρτιση β	Φόρτιση γ	Φόρτιση δ	Επαλληλία ($\alpha+\beta+\gamma+\delta$)
ξ_1	$1.164 \cdot 10^{-4}$	$2.268 \cdot 10^{-4}$	$5.733 \cdot 10^{-3}$	$-1.808 \cdot 10^{-4}$	$5.896 \cdot 10^{-3}$
ξ_2	$-9.414 \cdot 10^{-5}$	$1.884 \cdot 10^{-4}$	$5.992 \cdot 10^{-3}$	$-4.029 \cdot 10^{-4}$	$5.683 \cdot 10^{-3}$

Πίνακας 13.1 Οι τιμές των ξ_1, ξ_2 σε [rad] για τις τέσσερις φορτίσεις και την επαλληλία τους.

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Διαγράμματα καμπτικών ροπών M

Ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών επιτυγχάνεται με εφαρμογή της αρχής της επαλληλίας: $M_{ij} = M_{ij,0} + M_{i,1} \cdot \xi_1 + M_{i,2} \cdot \xi_2$. Με τη βοήθεια του πίνακα 13.1, είναι δυνατός ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών για κάθε μία από τις τέσσερις περιπτώσεις φόρτισης. Ωστόσο, παρακάτω, δίνονται οι τιμές των καμπτικών ροπών για την επαλληλία όλων των περιπτώσεων:

$$M_{12} = -377.38 \text{ kNm}, \quad M_{21} = -279.05 \text{ kNm}, \quad M_{23} = 279.05 \text{ kNm}, \quad M_{43} = 1097.5 \text{ kNm}$$

και με πρόσημα βάσει της σύμβασης της ίνας αναφοράς:

$$M_{12} = 377.38 \text{ kNm}, \quad M_{21} = -279.05 \text{ kNm}, \quad M_{23} = -279.05 \text{ kNm}, \quad M_{43} = 1097.5 \text{ kNm}.$$

Διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων Q

Οι τέμνουσες δυνάμεις υπολογίζονται κατά τα γνωστά από τις καμπτικές ροπές:

$$Q_{12} = -108.79\text{kN}, \quad Q_{21} = -153.79\text{kN}, \quad Q_{23} = 69.76\text{kN}, \quad Q_{32} = 69.76\text{kN},$$

$$Q_{34} = 237.50\text{kN}, \quad Q_{43} = 201.50\text{kN}.$$

Παρατήρηση:

Ο υπολογισμός των τεμνουσών δυνάμεων των στοιχείων 1-2 και 3-4, γίνεται ως εξής:

$$Q_{12} = \frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} + \frac{q_{κ12} \cdot L_{12}}{2} = \frac{-279.05 - 377.38}{5} + \frac{9 \cdot 5}{2} = -108.79\text{kN}$$

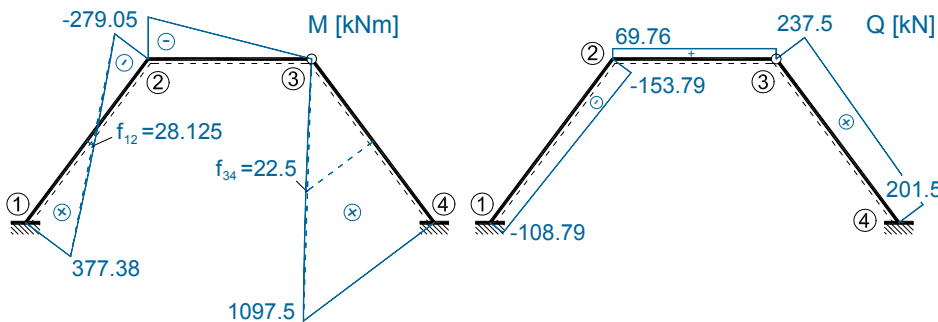
$$Q_{21} = \frac{M_{21} - M_{12}}{L_{12}} - \frac{q_{κ12} \cdot L_{12}}{2} = \frac{-279.05 - 377.38}{5} - \frac{9 \cdot 5}{2} = -153.79\text{kN}$$

$$Q_{34} = \frac{M_{43} - M_{34}}{L_{34}} + \frac{q_{κ34} \cdot L_{34}}{2} = \frac{1097.5}{5} + \frac{7.2 \cdot 5}{2} = 237.50\text{kN}$$

$$Q_{43} = \frac{M_{43} - M_{34}}{L_{34}} - \frac{q_{κ34} \cdot L_{34}}{2} = \frac{1097.5}{5} - \frac{7.2 \cdot 5}{2} = 201.50\text{kN}$$

Στις παραπάνω σχέσεις, οι ροπές εισάγονται με τα πρόσημα της σύμβασης της ίνας αναφοράς. Οι τιμές των $q_{κ12}$ και $q_{κ34}$ υπολογίζονται με βάση τις παρατηρήσεις του σχήματος 13.2-1.

Τα διαγράμματα M και Q δίνονται στο ακόλουθο σχήμα 13.11.



Σχήμα 13.11 Διαγράμματα M και Q για την επαλληλία των τεσσάρων περιπτώσεων φόρτισης.

Τα βέλη των παραβολών στο διάγραμμα ροπών υπολογίζονται ως εξής:

$$f_{12} = \frac{q_{κ12} \cdot L_{12}^2}{8} = \frac{9 \cdot 5^2}{8} = 28.125\text{kNm} \quad f_{34} = \frac{q_{κ34} \cdot L_{34}^2}{8} = \frac{7.2 \cdot 5^2}{8} \left(= \frac{q_2 \cdot L_2^2}{8} = \frac{20 \cdot 3^2}{8} \right) = 22.5\text{kNm}$$

Παρατηρείται ότι, στην εξεταζόμενη περίπτωση, οι παραβολικά μεταβαλλόμενες ροπές λόγω των κατανομμένων φορτίων στα στοιχεία 1-2 και 3-4 είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις ροπές, που αναπτύσσονται σε αυτά λόγω των υπολοίπων φορτίσεων β , γ και δ .

Διαγράμματα αξονικών δυνάμεων N

Τέλος, οι αξονικές δυνάμεις μπορούν να υπολογιστούν από την κατάστροψη των συνθηκών ισορροπίας $\Sigma F_x = 0$ και $\Sigma F_z = 0$ στους κόμβους 2 και 3 του φορέα. Παρατηρούμε εδώ ότι, επειδή τα λοξά στοιχεία 1-2 και 3-4 φορτίζονται από ομοιόμορφα φορτία που δεν είναι κάθετα στον άξονα τους, η συνιστώσα των φορτίων αυτών, κατά τη διεύθυνση του άξονα των στοιχείων, προκαλεί μια γραμμικώς μεταβαλλόμενη ένταση. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι αξονικές δυνάμεις στις στηρίξεις 1 και 4, να είναι διαφορετικές από τις αξονικές δυνάμεις στους κόμβους 2 και 3 αντίστοιχα.

Πρώτα υπολογίζονται οι αξονικές δυνάμεις N_{21} , N_{23} ($=N_{32}$) και N_{34} από τις συνθήκες ισορροπίας στους κόμβους 2 και 3 (πρόσημα της σύμβασης της ίνας αναφοράς):

$$N_{21} = -202.54\text{kN} \quad N_{23} = N_{32} = -244.56\text{kN} \quad N_{34} = -90.93\text{kN}$$

Λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση των εξωτερικών φορτίων σε συνιστώσες (βλ. Βήμα 2), παίρνουμε για την αξονική συνιστώσα της φόρτισης του στοιχείου 1-2:

$$q_{\delta 12} = q_{12} \cdot \sin\theta = 15 \cdot 0.8 = 12\text{kN/m}$$

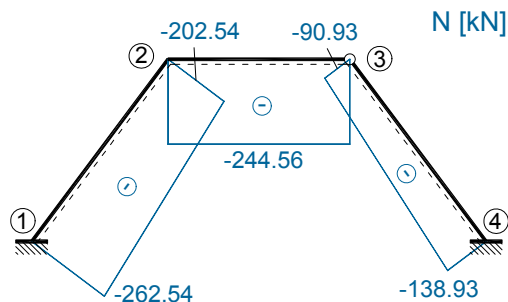
και για την αξονική συνιστώσα της φόρτισης του στοιχείου 3-4:

$$q_{\delta 34} = q_{34} \cdot \cos\theta \cdot \sin\theta = 20 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 9.6 \text{ kN/m}$$

Με αυτά τα αξονικώς κατανεμημένα φορτία, προκύπτουν οι αξονικές δυνάμεις στις στηρίξεις 1 και 4:

$$N_{12} = N_{21} - q_{\delta 12} \cdot L_{12} = -202.54 - 12 \cdot 5 = -262.54 \text{ kN}, \quad N_{43} = N_{34} - q_{\delta 34} \cdot L_{34} = -90.93 - 9.6 \cdot 5 = -138.93 \text{ kN}$$

Το διάγραμμα των αξονικών δυνάμεων απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα 13.12.

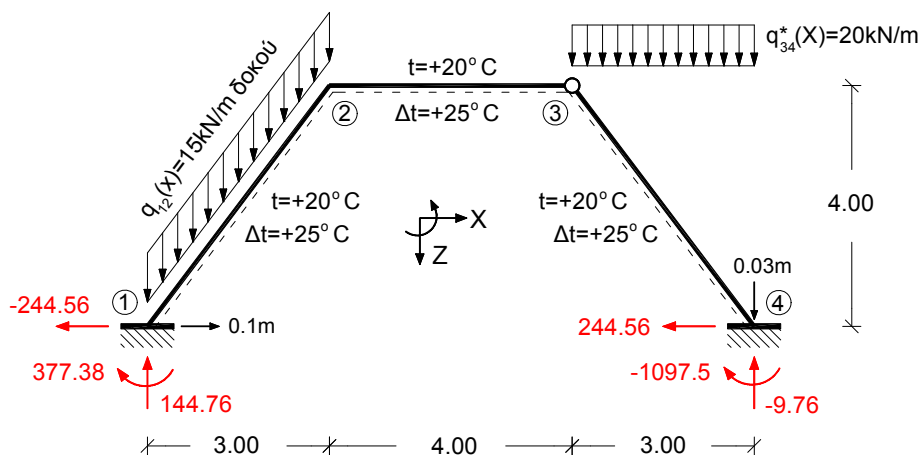


Σχήμα 13.12 Διάγραμμα N για την επαλληλία των τεσσάρων περιπτώσεων φόρτισης.

Ακολουθεί το τελευταίο και απαραίτητο βήμα της διαδικασίας υπολογισμού, που συνίσταται στον έλεγχο των αποτελεσμάτων.

Βήμα 7. Έλεγχοι αποτελεσμάτων

Ακολουθώς διενεργούνται τρεις ισοροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (βλ. Σχ. 13.13).



$$\sum F_x = 244.56 - 244.56 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 144.76 - 9.76 - (20 \cdot 3) - 15 \cdot \left(\frac{3}{0.6}\right) = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 20 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2} + 7\right) + 15 \cdot \left(\frac{3}{0.6}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 377.38 - 1097.5 + (9.76 \cdot 10) = -0.02 \approx 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 13.13 Ισοροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Οι τρεις ελεγχθείσες συνθήκες ισοροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισοροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίνονται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 6

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
- [2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙ: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Κεφάλαιο 7

Συμμετρικοί φορείς

Σύνοψη

Οι ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού αφορούν σε συμμετρικούς φορείς υπό τυχαία φόρτιση. Δεδομένου ότι, οποιαδήποτε φόρτιση μπορεί να αναλυθεί σε μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική συνιστώσα, παρουσιάζονται οι μεθοδολογίες αξιοποίησης της συμμετρίας του φορέα (α) υπό συμμετρική και (β) υπό αντισυμμετρική φόρτιση, με στόχο τη μείωση του πλήθους των αγνώστων μεγεθών μετακίνησης. Οι μεθοδολογίες αυτές, οι οποίες συνίστανται, είτε στη θεώρηση του «μισού» φορέα, είτε στη χρησιμοποίηση «ομάδων υπεραρίθμων», εφαρμόζονται σε μία δοκό δύο ανοιγμάτων (Άσκηση 14), σε ένα ατενές δίστυλο πλαίσιο (Άσκηση 15) και σε ένα ατενές τρίστυλο πλαίσιο με τον μεσαίο του στύλο επί του άξονα συμμετρίας (Άσκηση 16). Για το τελευταίο εξετάζεται, επιπλέον, η διαφοροποίηση την οποία συνεπάγεται η τυχόν πεπερασμένη δυστένεια του μεσαίου στύλου.

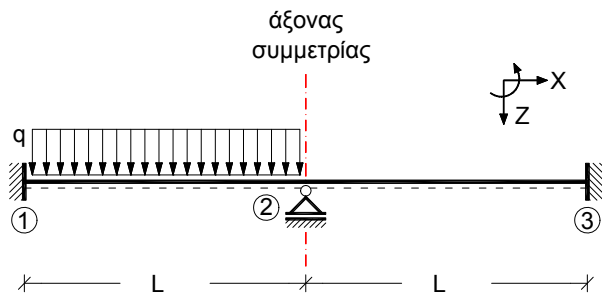
Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων (βλ. π.χ. [2]-κεφ.3) και, οπωσδήποτε, η μελέτη των ασκήσεων των προηγούμενων κεφαλαίων 1 έως 6. Ειδικότερα, συνιστάται η μελέτη των παραγράφων 6.6 του [1] και 3.6.2 του [2]. Σε κάθε περίπτωση, απαιτείται καλή γνώση της Στατικής των Ισοστατικών φορέων, καθώς και επαρκής εξοικείωση με τη Μέθοδο των υπεραρίθμων δυνάμεων για υπερστατικούς φορείς (βλ. π.χ. [1] και [2]-κεφ.2, καθώς και λοιπή σχετική βιβλιογραφία της παραγράφου Ε7).

Άσκηση 14

Εκφώνηση

Να επιλυθεί ο φορέας του σχήματος 14.0 και να σχεδιαστεί το διάγραμμα ροπών κάμψης M :
 (α) με την συνήθη διαδικασία της ΜΜ και
 (β) αξιοποιώντας τη συμμετρία.



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία
 $L=5.00m$

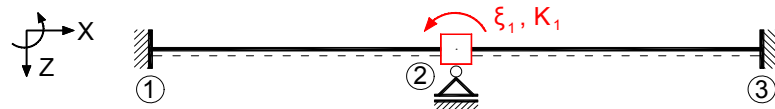
Φορτίσεις/Καταναγκασμοί
 $q=15\text{ kN/m}$

Δοκοί
 $EI_1=10^5\text{ kNm}^2$
 $EA \rightarrow GA_s \rightarrow \infty$

Σχήμα 14.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

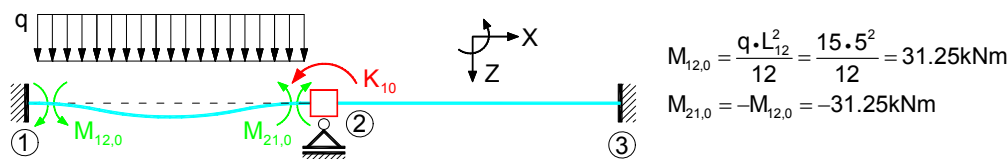
Λόγω της ατένειας των στοιχείων του φορέα, το μοναδικό άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος είναι η γωνία στροφής του κόμβου 2. Επομένως, το ΓΚΣ του φορέα είναι το εξής:



Σχήμα 14.1 Το ΓΚΣ του φορέα.

(α) Συνήθης διαδικασία επίλυσης

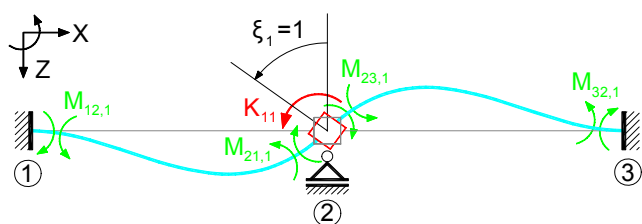
Η συνήθης διαδικασία της ΜΜ απαιτεί, καταρχάς, τον υπολογισμό των ροπών στο ΓΚΣ λόγω της εξωτερικής φόρτισης (Κατάσταση "0") και λόγω της μοναδιαίας στροφής του κόμβου 2 (Κατάσταση " $\xi_1=1$ "). Κατόπιν, υπολογίζονται, με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας ή της αρχής των δυνατών έργων, οι συντελεστές K_{10} και K_{11} , και με αυτούς η άγνωστη στροφή $\xi_1=-K_{10}/K_{11}$. Η διαδικασία αυτή παρουσιάζεται ακολούθως με συντομία (βλ. Σχ. 14.2 και 14.3):



$$M_{12,0} = \frac{q \cdot L_{12}^2}{12} = \frac{15 \cdot 5^2}{12} = 31.25\text{ kNm}$$

$$M_{21,0} = -M_{12,0} = -31.25\text{ kNm}$$

Σχήμα 14.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0".



$$M_{12,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 2 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot 1 = 40000\text{ kNm}$$

$$M_{21,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 80000\text{ kNm}$$

$$M_{23,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 4 \cdot \left(\frac{10^5}{5} \right) \cdot 1 = 80000\text{ kNm}$$

$$M_{32,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 40000\text{ kNm}$$

Σχήμα 14.3 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_1=1$ ".

Οι συντελεστές K_{10} και K_{11} υπολογίζονται από την ισορροπία ροπών του κόμβου 2 στην κατάσταση “0” (Σχ. 14.2) και στην κατάσταση “ $\xi_1=1$ ” (Σχ. 14.3) αντιστοίχως:

$$K_{10} = M_{21,0} = -31.25 \text{ kNm}$$

$$K_{11} = M_{21,1} + M_{23,1} = 80000 + 80000 = 160000 \text{ kNm}$$

Το υπεράριθμο γεωμετρικό μέγεθος ξ_1 , δηλαδή η γωνία στροφής του κόμβου 2, υπολογίζεται από την παρακάτω συνθήκη ισορροπίας στον κόμβο 2:

$$K_1 = K_{11} \cdot \xi_1 + K_{10} = 0 \Rightarrow \xi_1 = -\left(\frac{K_{10}}{K_{11}}\right) = -\left(\frac{-31.25}{160000}\right) = 1.953 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Οι ροπές κάμψης, που αναπτύσσονται στο φορέα, υπολογίζονται από τις σχέσεις επαλληλίας, κατά τα γνωστά:

$$M_{12} = M_{12,0} + \xi_1 \cdot M_{12,1} = 31.25 + 1.953 \cdot 10^{-4} \cdot 40000 = 39.06 \text{ kNm}$$

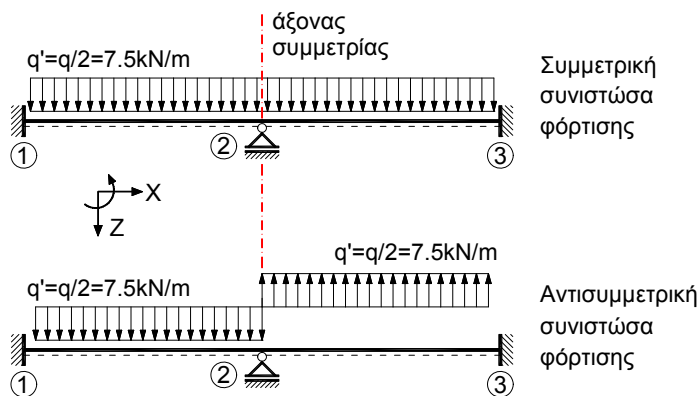
$$M_{21} = M_{21,0} + \xi_1 \cdot M_{21,1} = -31.25 + 1.953 \cdot 10^{-4} \cdot 80000 = -15.62 \text{ kNm}$$

$$M_{23} = M_{23,0} + \xi_1 \cdot M_{23,1} = 0 + 1.953 \cdot 10^{-4} \cdot 80000 = 15.62 \text{ kNm}$$

$$M_{32} = M_{32,0} + \xi_1 \cdot M_{32,1} = 0 + 1.953 \cdot 10^{-4} \cdot 40000 = 7.81 \text{ kNm}$$

(β) Απλούστευση της επίλυσης με αξιοποίηση της συμμετρίας του φορέα

Η όλη διαδικασία υπολογισμού, που περιγράφηκε προηγουμένως, μπορεί να συντομευτεί, εάν γίνει αξιοποίηση της συμμετρίας του φορέα. Προς τούτο, η δεδομένη φόρτιση αναλύεται σε μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική συνιστώσα (Σχ. 14.4).

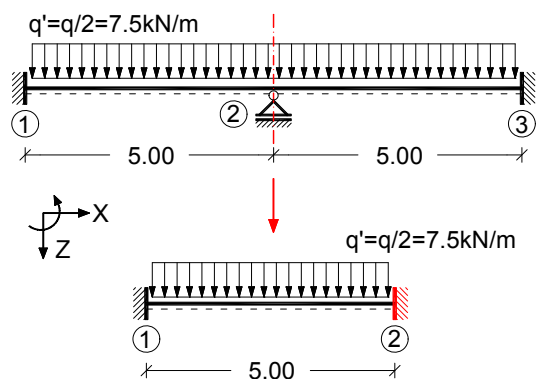


Σχήμα 14.4 Ανάλυση της φόρτισης σε μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική συνιστώσα.

Ο φορέας θα επιλυθεί ξεχωριστά για τη συμμετρική και για την αντισυμμετρική συνιστώσα της δεδομένης φόρτισης.

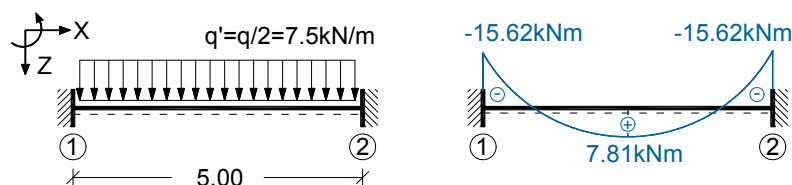
Συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Στην περίπτωση αυτή, η στροφή του κόμβου 2 είναι ίση με το μηδέν ($\varphi_2=0$), διότι ο κόμβος βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας. Επομένως, η επίλυση για τη συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης μπορεί να γίνει με βάση την αμφίπακτη δοκό 1-2, όπως φαίνεται στο σχήμα 14.5:



Σχήμα 14.5 Επίλυση για τη συμμετρική συνιστώσα της δεδομένης φόρτισης.

Ο υπολογισμός των ροπών στα σημεία 1, 2 και 3 γίνεται, κατά τα γνωστά, με την βοήθεια του Πίνακα 1α (εδώ απευθείας με πρόσημα βάσει ίνας αναφοράς):

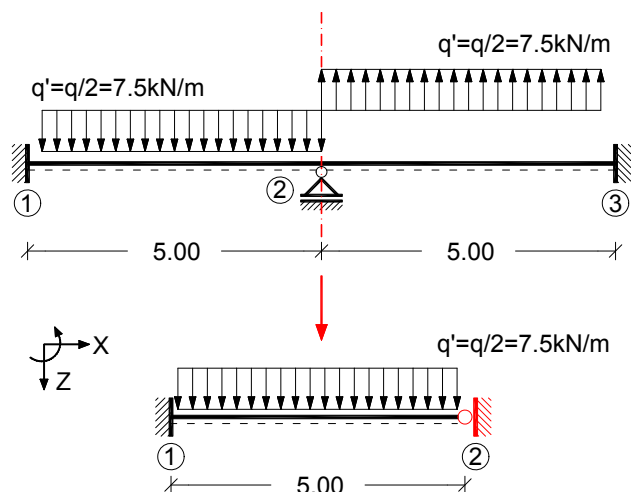


$$M_1^{\text{συμμ.}} = -\frac{q' \cdot L_{12}^2}{12} = -\frac{7.5 \cdot 5^2}{12} = -15.62 \text{ kNm} \quad M_2^{\text{συμμ.}} = M_1^{\text{συμμ.}} = -15.62 \text{ kNm}$$

Σχήμα 14.6 Διάγραμμα ροπών για την συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης.

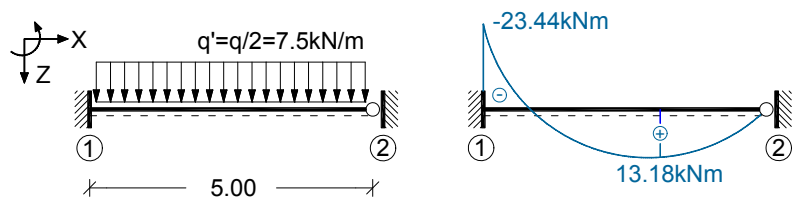
Αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Στην περίπτωση αυτή, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη το γεγονός ότι, σε συμμετρικούς φορείς υπό αντισυμμετρική φόρτιση, οι καμπτικές ροπές έχουν μηδενική τιμή επάνω στον άξονα συμμετρίας. Επομένως, για την επίλυση του φορέα υπό την αντισυμμετρική συνιστώσα της δεδομένης φόρτισης, μπορεί να εισαχθεί μία άρθρωση στον κόμβο 2, χωρίς αυτό να αλλοιώνει την εντασιακή κατάσταση και, στη συνέχεια, να επιλυθούν οι μονόπακτες δοκοί 1-2 και 2-3, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 14.7:



Σχήμα 14.7 Επίλυση για την αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης.

Ο υπολογισμός των ροπών στα σημεία 1 και 3 γίνεται, κατά τα γνωστά, με τη βοήθεια των πινάκων 2α και 2β. Για τη δοκό 1-2 παίρνουμε (Σχ. 14.8, εδώ απευθείας με πρόσημα βάσει ίνας αναφοράς):



$$M_1^{αντ.} = -\frac{q' \cdot L_{12}^2}{8} = -\frac{7.5 \cdot 5^2}{8} = -23.44 \text{ kNm} \quad \max M^{αντ.} = \frac{9}{128} \cdot (q' \cdot L_{12}^2) = 13.18 \text{ kNm}$$

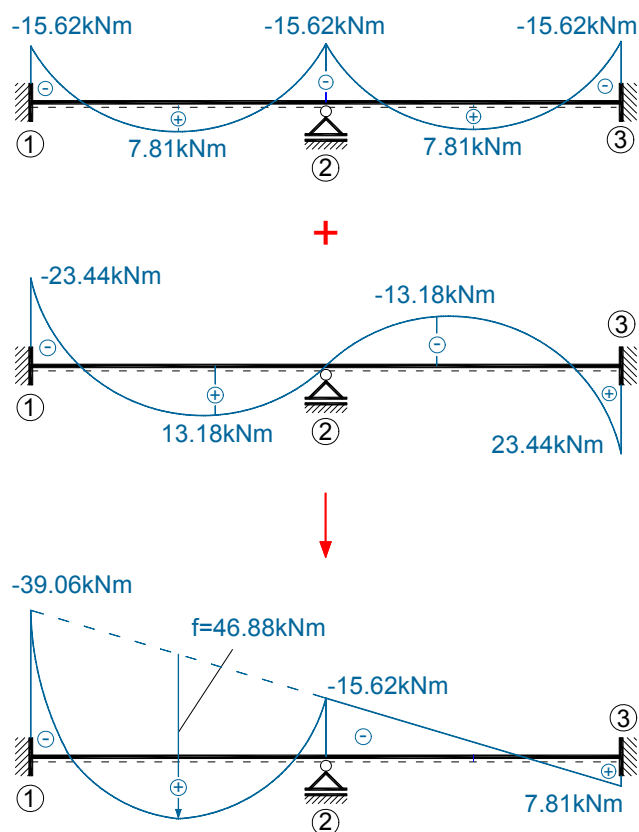
Σχήμα 14.8 Διάγραμμα ροπών για την αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης.

Τελικό διάγραμμα ροπών

Το τελικό διάγραμμα ροπών του φορέα προκύπτει από την επαλληλία των διαγραμμάτων ροπών, που δόθηκαν στα παραπάνω σχήματα 14.6 και 14.8:

$$M_i = M_i^{συμμ} + M_i^{αντ.},$$

λαμβάνοντας, παράλληλα, υπόψη ότι, το διάγραμμα ροπών συμμετρικών φορέων για συμμετρική φόρτιση είναι συμμετρικό, ενώ για αντισυμμετρική φόρτιση είναι αντισυμμετρικό.

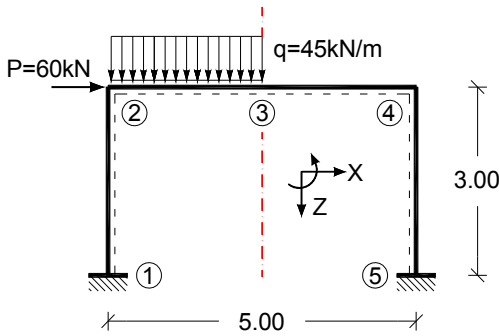


Σχήμα 14.9 Τελικό διάγραμμα ροπών του φορέα.

Άσκηση 15

Εκφώνηση

Για τον συμμετρικό φορέα του σχήματος 15.0 υπό τη δεδομένη φόρτιση, ζητείται η επίλυση με τη ΜΜ και η σχεδίαση των διαγραμμάτων M, Q και N: (α) με θεώρηση του μισού φορέα και (β) με εισαγωγή ομάδων υπεραρίθμων μεγεθών.



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

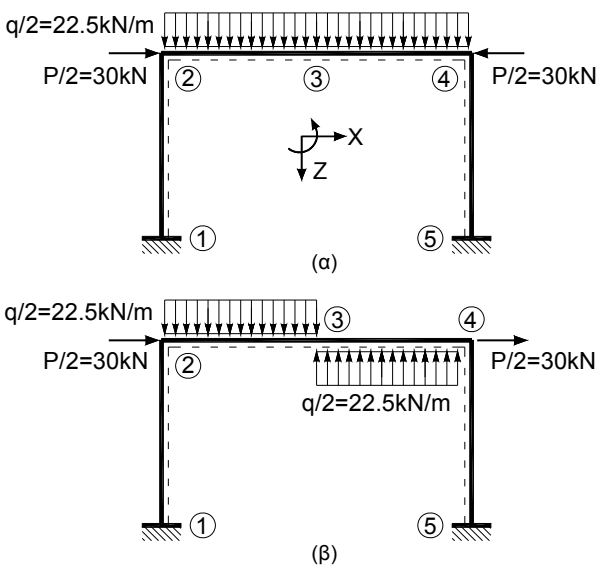
$EI = 10^5 \text{ kNm}^2$

$EA \rightarrow GA_s \rightarrow \infty$

Σχήμα 15.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

(α) Επίλυση με θεώρηση του μισού φορέα

Αναλύεται, καταρχάς, η φόρτιση του φορέα σε μια συμμετρική και μια αντισυμμετρική συνιστώσα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 15.1.



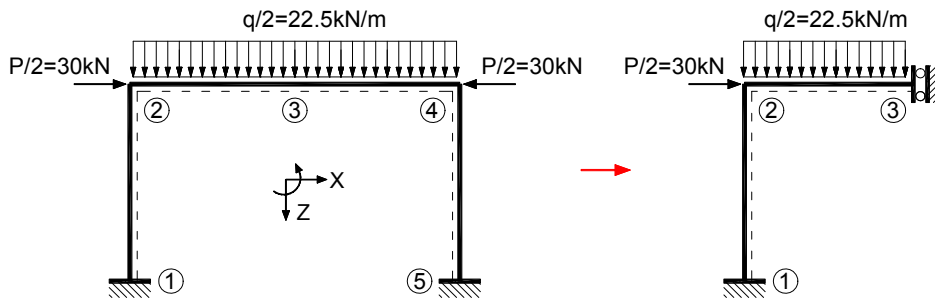
Σχήμα 15.1 Ανάλυση της φόρτισης του φορέα σε συμμετρική (α) και αντισυμμετρική (β) συνιστώσα.

(α1) Συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Όπως γνωρίζουμε (βλ. [2], παράγρ. 2.6.2 και 3.6.2), όταν ο άξονας συμμετρίας ενός συμμετρικού και συμμετρικά φορτιζόμενου φορέα τέμνει κάθετα μια δοκό του φορέα, τότε στο σημείο τομής όλα τα αντισυμμετρικά στατικά μεγέθη είναι μηδενικά, δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

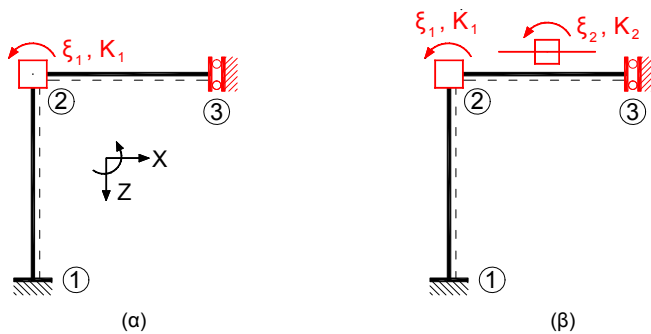
- τέμνουσα δύναμη $Q=0$,
- κλίση ελαστικής γραμμής (δηλαδή: στροφή) $\varphi=0$,
- οριζόντια μετατόπιση $v_x=0$.

Επομένως, για την εκτέλεση των υπολογισμών στον μισό φορέα, θα πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο τομής του με τον άξονα συμμετρίας (σημείο 3) ένας κατάλληλος μηχανισμός στήριξης, ο οποίος να ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες. Ο μηχανισμός αυτός στήριξης είναι η κινητή πάκτωση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 15.2.



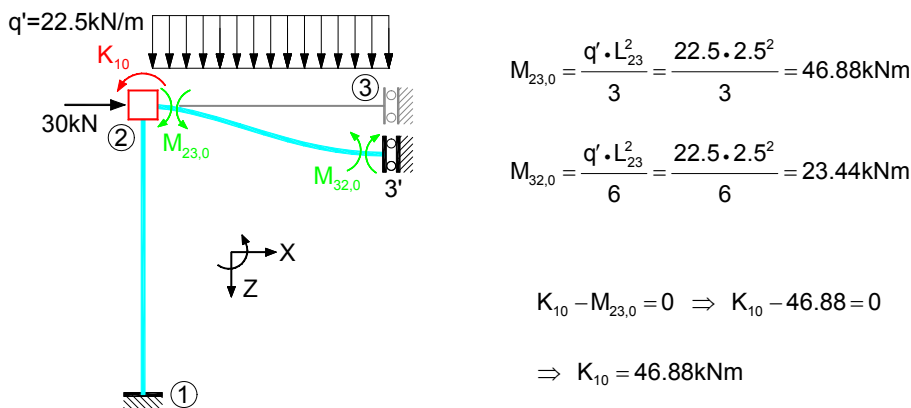
Σχήμα 15.2 Θεώρηση του μισού φορέα για τη συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης.

Για την επίλυση του μισού φορέα του σχήματος 15.2, υπάρχουν δύο δυνατότητες επιλογής του ΓΚΣ, οι οποίες δίνονται στο σχήμα 15.3.



Σχήμα 15.3 ΓΚΣ του μισού φορέα για συμμετρική φόρτιση: (α) Με χρήση πινάκων δοκού με κινητή πάκτωση στο ένα άκρο, (β) Με χρήση μόνον των πινάκων αμφίπακτης δοκού.

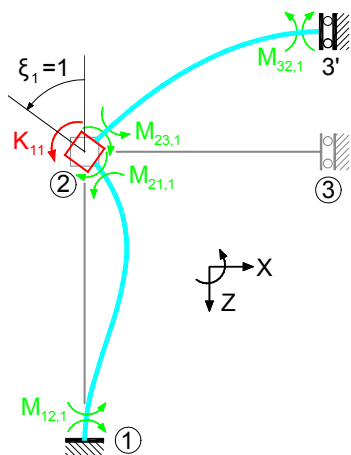
Για τους περαιτέρω υπολογισμούς, θα επιλεγεί η χρήση του ΓΚΣ του σχήματος 15.3(α) με το ένα άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος: τη γωνία στροφής του κόμβου 2. Η επίλυση με αυτό το ΓΚΣ γίνεται, κατά τα γνωστά, και παρουσιάζεται συνοπτικά παρακάτω (βλ. Σχ. 15.4 και Σχ. 15.5).



Σχήμα 15.4 Ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" – Υπολογισμός του φορτιστικού όρου K_{10} .

Σημείωση:

Η ροπή $M_{23,0}$ είναι ίση με τη ροπή στο αριστερό άκρο μίας αμφίπακτης δοκού διπλάσιου μήκους $2 \cdot L_{23}$ υπό το ίδιο συνεχές φορτίο q' , δηλ. ίση με $q' \cdot (2 \cdot L_{23})^2 / 12 = q' \cdot (L_{23})^2 / 3$.



$$\begin{aligned} \varphi_2 = \xi_1 = 1 \\ M_{12,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 66666.67 \text{ kNm} \\ M_{21,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 133333.33 \text{ kNm} \\ M_{23,1} = \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 40000 \text{ kNm} \\ M_{32,1} = - \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = -40000 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$K_{11} - M_{23,1} - M_{21,1} = 0 \Rightarrow K_{11} - 40000 - 133333.33 \Rightarrow K_{11} = 173333.33 \text{ kNm}$$

Σχήμα 15.5 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση “ $\xi_1=1$ ” – Υπολογισμός του συντελεστή K_{11} .

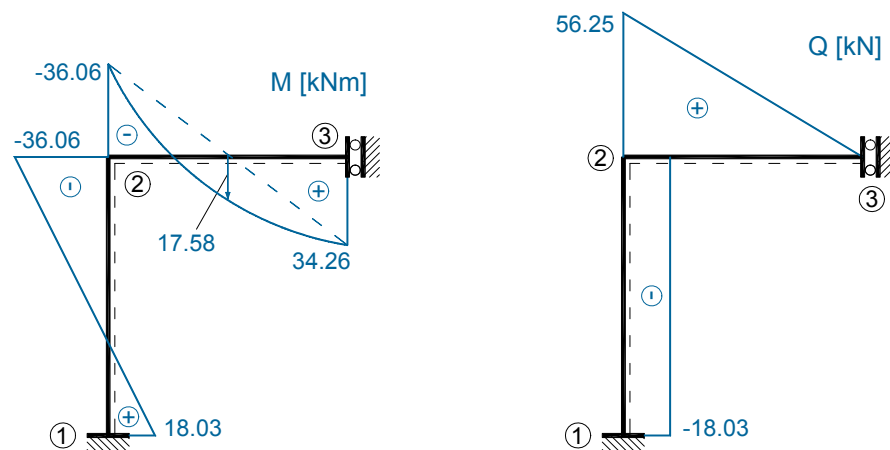
Σημείωση:

Η ροπή $M_{23,1}$ είναι ίση με τη ροπή στο αριστερό άκρο μίας αμφίπακτης δοκού διπλάσιου μήκους $2 \cdot L_{23}$ υπό καταναγκασμένες ταυτόχρονες και ετερόσημες μοναδιαίες στροφές των άκρων της.

Ο υπολογισμός του ξ_1 γίνεται με βάση τη συνθήκη ισορροπίας στον κόμβο 2:

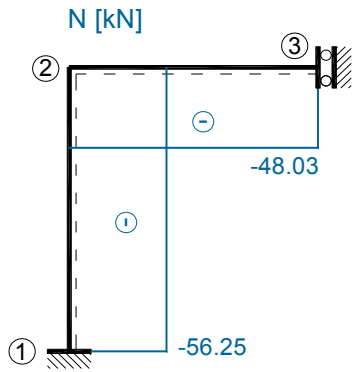
$$K_{10} + K_{11} \cdot \xi_1 = 0 \Rightarrow \xi_1 = - \left(\frac{K_{10}}{K_{11}} \right) = - \left(\frac{46.88}{173333.33} \right) = -2.705 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Οι καμπτικές ροπές προκύπτουν από τη σχέση επαλληλίας $M_{ij} = M_{i,j,0} + M_{i,j,1} \cdot \xi_1$ και από αυτές υπολογίζονται με τις συνθήκες ισορροπίας οι τέμνουσες δυνάμεις Q . Τα αντίστοιχα διαγράμματα δίνονται στο σχήμα 15.6.



Σχήμα 15.6 Διαγράμματα M και Q του μισού φορέα για τη συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης.

Το διάγραμμα των αξονικών δυνάμεων προκύπτει πολύ εύκολα από την κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας των οριζοντίων και των κατακορύφων δυνάμεων στον κόμβο 2. Το διάγραμμα αυτό δίνεται στο παρακάτω σχήμα 15.7.



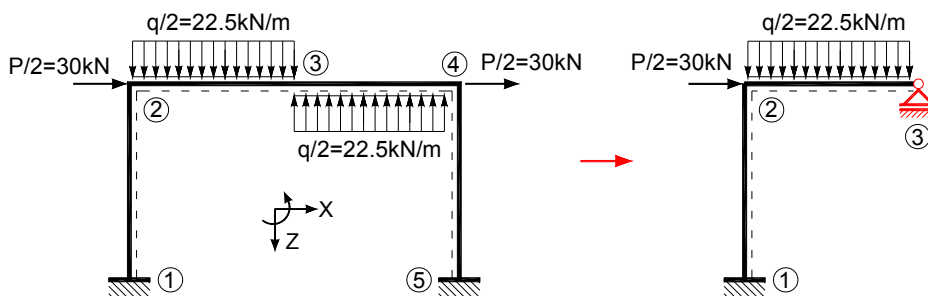
Σχήμα 15.7 Διάγραμμα N του μισού φορέα για τη συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης.

(α2) Αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Όπως γνωρίζουμε (βλ. [2], παράγρ. 2.6.2 και 3.6.2), όταν ο άξονας συμμετρίας ενός συμμετρικού και αντισυμμετρικά φορτιζόμενου φορέα τέμνει κάθετα μια δοκό του φορέα, τότε στο σημείο τομής όλα τα συμμετρικά στατικά μεγέθη είναι μηδενικά, δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

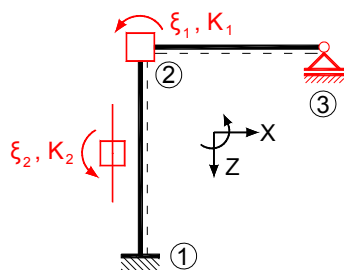
- καμπτική ροπή $M=0$
- αξονική δύναμη $N=0$
- κατακόρυφη μετακίνηση $v_z=0$

Επομένως, για την εκτέλεση των υπολογισμών στον μισό φορέα, θα πρέπει να τοποθετηθεί στο σημείο τομής του με τον άξονα συμμετρίας (σημείο 3) ένας κατάλληλος μηχανισμός στήριξης, ο οποίος να ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες. Ο μηχανισμός αυτός στήριξης είναι μία κύλιση, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 15.8:



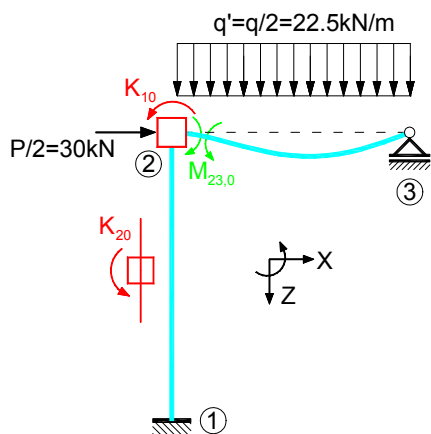
Σχήμα 15.8 Θεώρηση του μισού φορέα για την αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης.

Το ΓΚΣ του φορέα του σχήματος 15.8 προκύπτει με παγίωση της στροφής του κόμβου 2 και ταυτόχρονη παγίωση της στροφής της χορδής 1-2 (Σχ. 15.9):

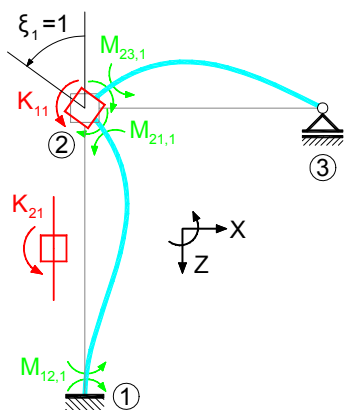


Σχήμα 15.9 ΓΚΣ του μισού φορέα για αντισυμμετρική φόρτιση.

Για τον υπολογισμό των δυο αυτών αγνώστων γεωμετρικών μεγεθών, ακολουθείται η συνήθης διαδικασία της ΜΜ. Στο σχήμα 15.10 παρουσιάζονται οι καταστάσεις " 0 ", " $\xi_1=1$ " και " $\xi_2=1$ ".



$$M_{23,0} = \frac{q' \cdot L_{23}^2}{8} = \frac{(q/2) \cdot L_{23}^2}{8} = \frac{22.5 \cdot 2.5^2}{8} = 17.58 \text{ kNm}$$

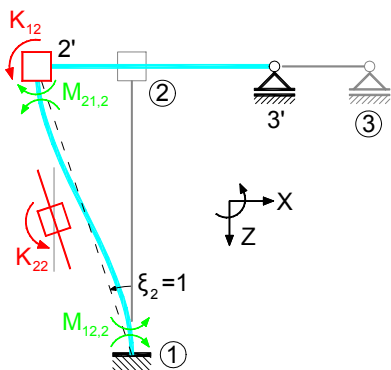


$$\varphi_2 = \xi_1 = 1$$

$$M_{12,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 66666.67 \text{ kNm}$$

$$M_{21,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 133333.33 \text{ kNm}$$

$$M_{23,1} = 3 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 120000 \text{ kNm}$$



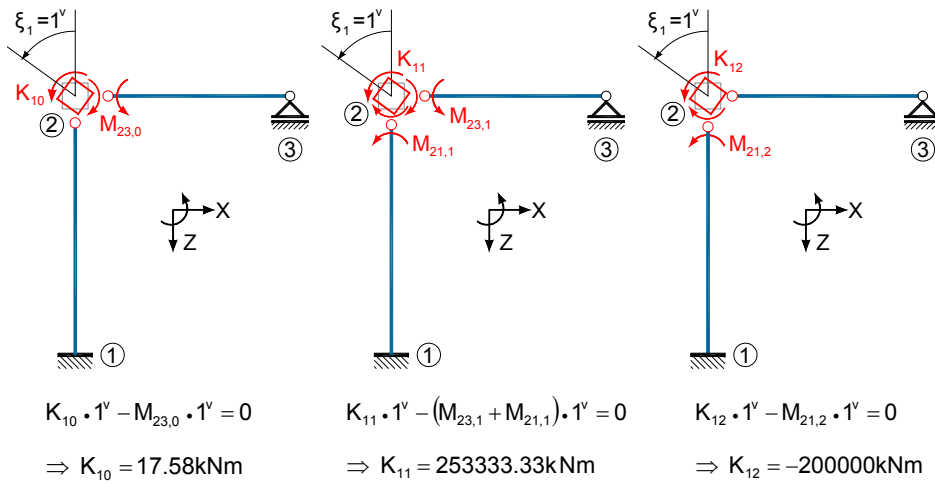
$$\psi_{12,2} = \xi_2 = 1$$

$$M_{12,2} = -6 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{12,2} = -200000 \text{ kNm}$$

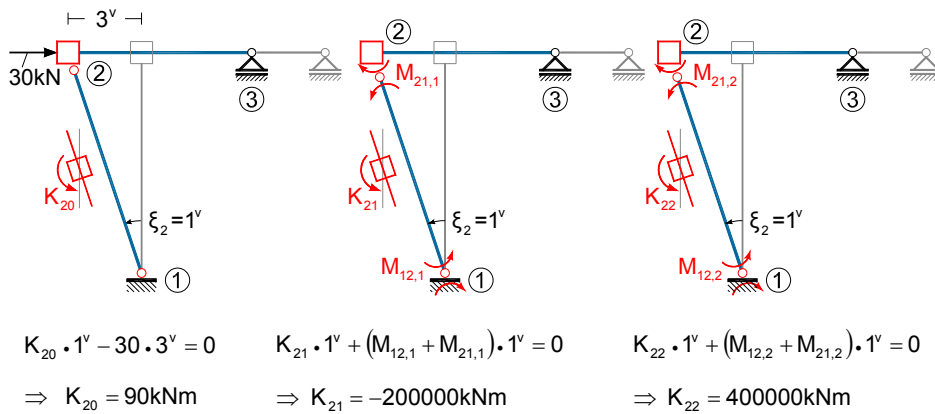
$$M_{21,2} = -6 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{12,2} = -200000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 15.10 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στις καταστάσεις "0", "ξ₁=1" και "ξ₂=1".

Στα σχήματα 15.11 και 15.12 φαίνονται οι νοητές καταστάσεις "ξ₁=1" και "ξ₂=1", με τη βοήθεια των οποίων υπολογίζονται οι συντελεστές στιβαρότητας K_{ij} και οι συντελεστές φόρτισης K_{i0}.



Σχήμα 15.11 Υπολογισμός των συντελεστών K_{10} , K_{11} και K_{12} με την ΑΔΕ.

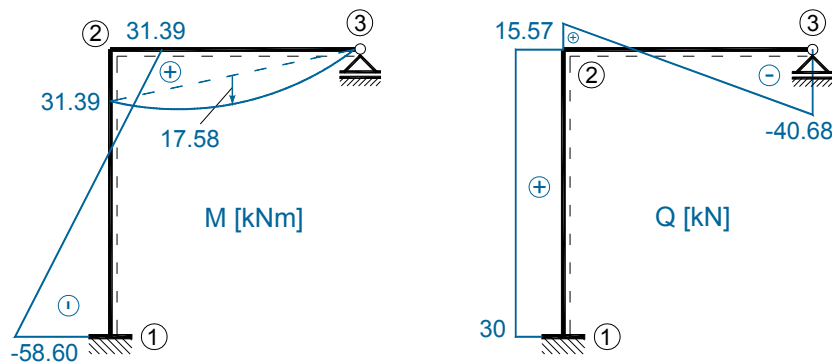


Σχήμα 15.12 Υπολογισμός των συντελεστών K_{20} , K_{21} και K_{22} με την ΑΔΕ.

Ο υπολογισμός των ξ_1 και ξ_2 γίνεται από την επίλυση του παρακάτω συστήματος των δύο εξισώσεων ισορροπίας:

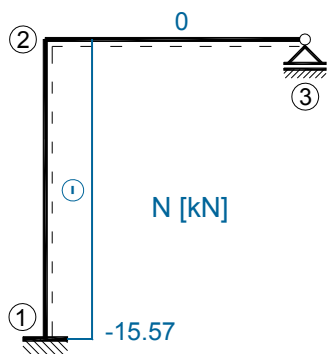
$$\left. \begin{aligned} 253333.33 \cdot \xi_1 - 200000 \cdot \xi_2 + 17.58 &= 0 \\ -200000 \cdot \xi_1 + 400000 \cdot \xi_2 + 90 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \xi_1 &= -4.081 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \xi_2 &= -4.291 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned}$$

Ακολουθεί, κατά τα γνωστά, με τη βοήθεια της αρχής της επαλληλίας, ο υπολογισμός των καμπτικών ροπών και των τεμνουσών δυνάμεων, τα διαγράμματα των οποίων δίνονται στο σχήμα 15.13.



Σχήμα 15.13 Διαγράμματα M , Q του μισού φορέα για την αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης.

Ο υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων γίνεται εύκολα, με κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας των δυνάμεων που δρουν στον κόμβο 2. Το διάγραμμα N δίνεται στο παρακάτω σχήμα 15.14.



Σχήμα 15.14 Διάγραμμα N του μισού φορέα για την αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης.

Παρατήρηση:

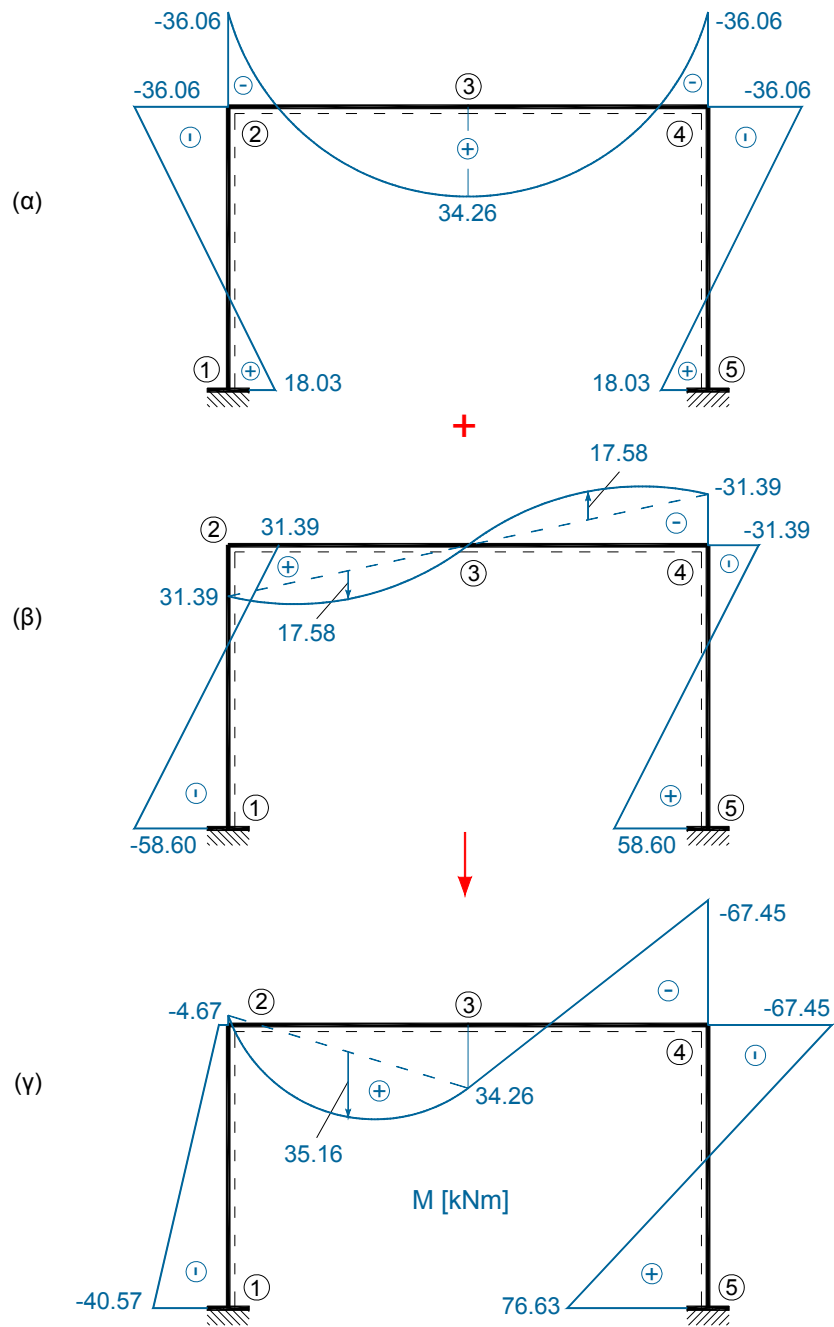
Ο μισός φορέας του σχήματος 15.8 για την αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης, είναι μια μόνο φορά στατικά αόριστος. Επομένως, αντί της επίλυσής του με τη ΜΜ ως δύο φορές γεωμετρικά αόριστου, ο φορέας αυτός μπορεί να επιλυθεί ταχύτερα με τη ΜΔ.

(α3) Τελικά διαγράμματα

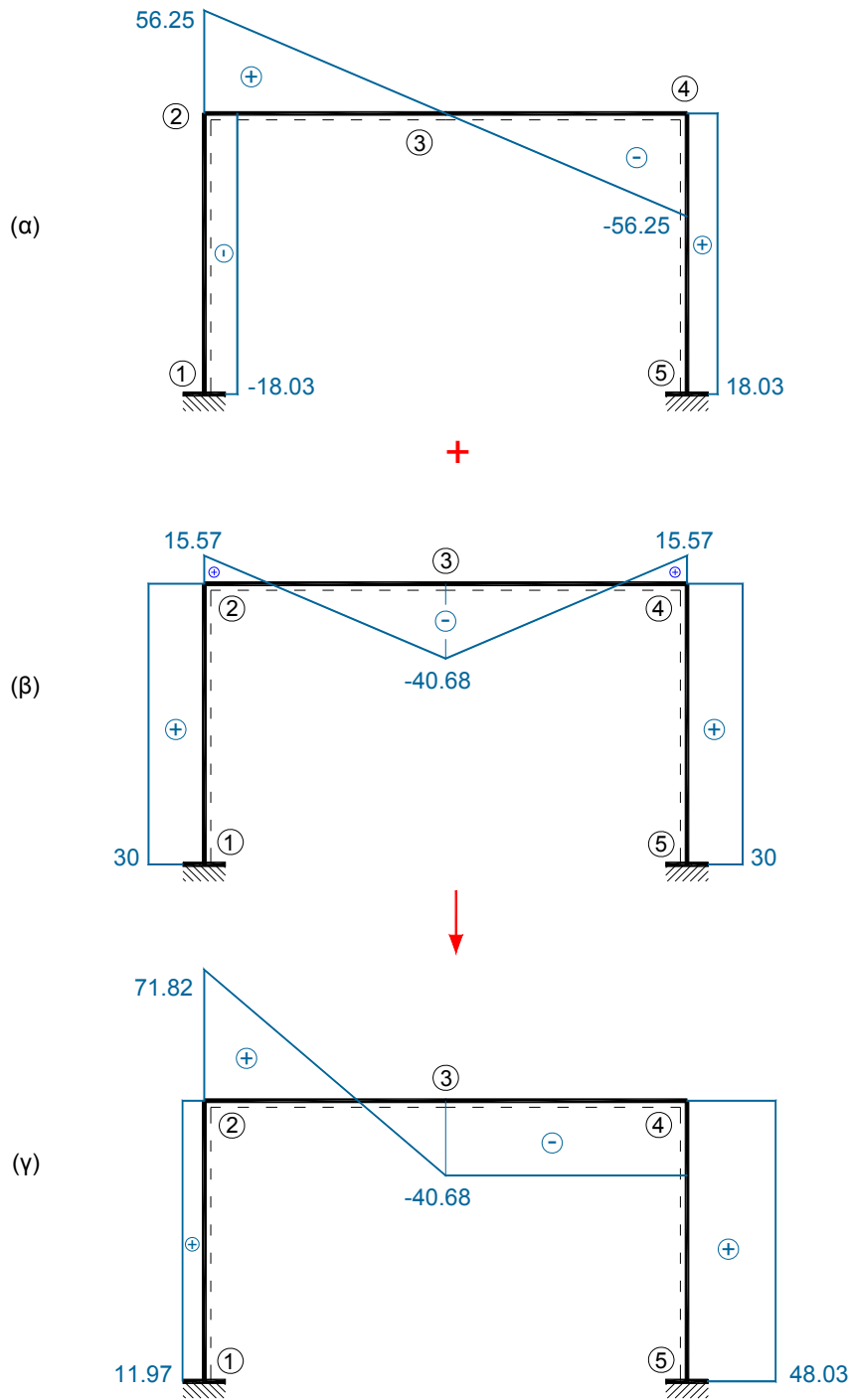
Τα διαγράμματα M, Q και N του φορέα προκύπτουν από την επαλληλία των διαγραμμάτων των σχημάτων 15.6 και 15.7 με τα διαγράμματα των σχημάτων 15.13 και 15.14 αντίστοιχα, λαμβάνοντας παράλληλα υπόψη:

- (α) ότι τα διαγράμματα ροπών συμμετρικών φορέων υπό συμμετρική φόρτιση είναι συμμετρικά, ενώ υπό αντισυμμετρική φόρτιση είναι αντισυμμετρικά,
- (β) ότι τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων συμμετρικών φορέων υπό συμμετρική φόρτιση είναι αντισυμμετρικά, ενώ υπό αντισυμμετρική φόρτιση είναι συμμετρικά, και
- (γ) ότι τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων συμμετρικών φορέων υπό συμμετρική φόρτιση είναι συμμετρικά, ενώ υπό αντισυμμετρική φόρτιση είναι αντισυμμετρικά.

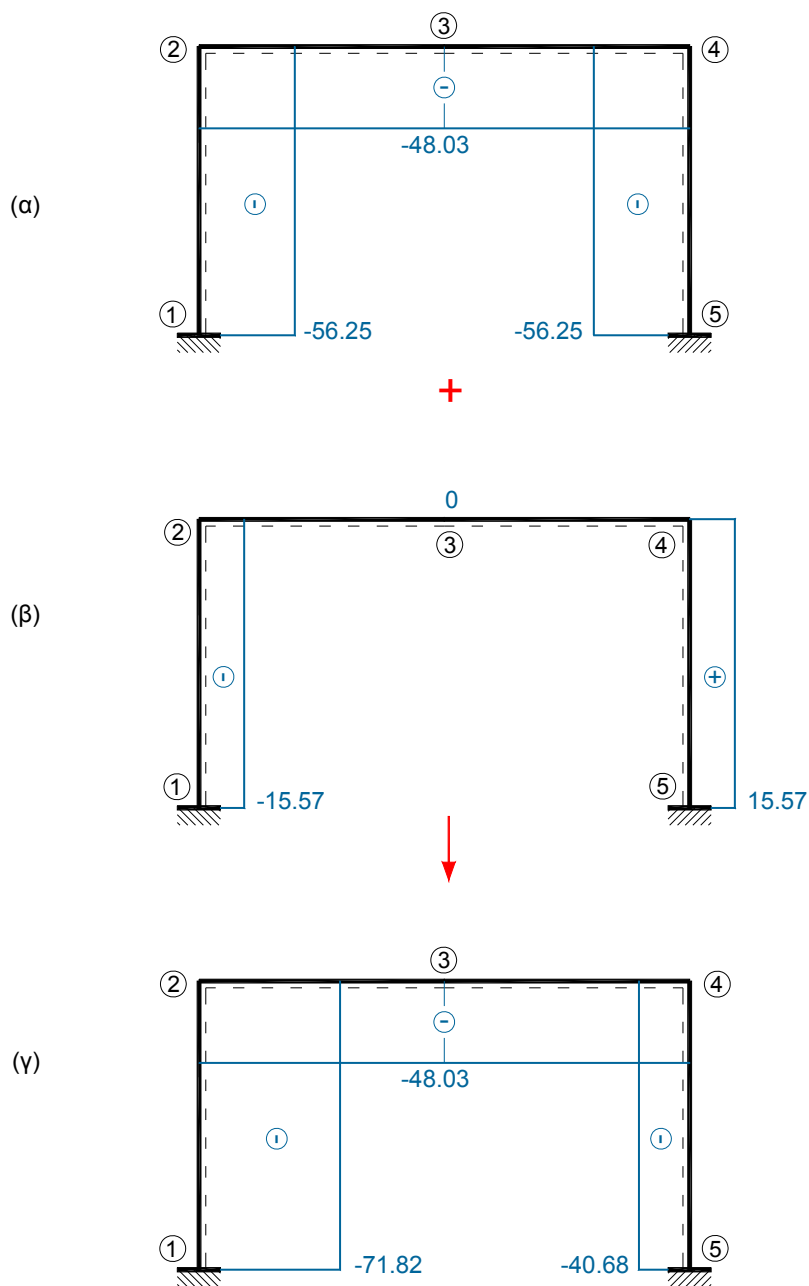
Τα τελικά διαγράμματα M, Q και N για ολόκληρο τον φορέα δίνονται στα ακόλουθα σχήματα 15.15, 15.16 και 15.17.



Σχήμα 15.15 Διάγραμμα καμπτικών ροπών M .



Σχήμα 15.16 Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων Q .



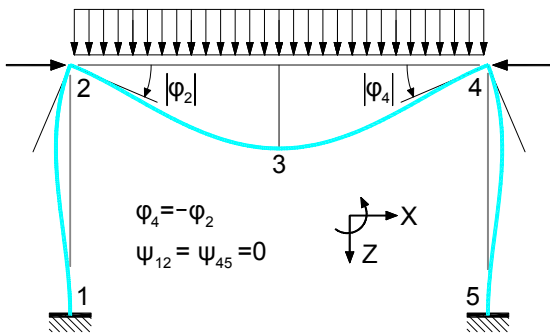
Σχήμα 15.17 Διάγραμμα αξονικών δυνάμεων N.

(β) Επίλυση με εισαγωγή ομάδων υπεραρίθμων μεγεθών

Η διαδικασία επίλυσης με την εισαγωγή ομάδων υπεραρίθμων μεγεθών ξεκινά, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση που χρησιμοποιήθηκε ο μισός φορέας, με την ανάλυση της φόρτισης σε συμμετρική και αντισυμμετρική σύμφωνα με το σχήμα 15.1. Για τον ορισμό των ομάδων υπεραρίθμων μεγεθών, θα πρέπει να εντοπιστούν τα γεωμετρικά μεγέθη, που καθορίζουν την παραμόρφωση του φορέα για τη συμμετρική και την αντισυμμετρική φόρτιση, και, κατόπιν, να ευρεθεί ποια από αυτά σχετίζονται μεταξύ τους.

(β1) Συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Όταν ο ατελής και συμμετρικός φορέας του σχήματος 15.0 φορτίζεται με συμμετρική φόρτιση, η παραμόρφωσή του συνίσταται στην ταυτόχρονη, ίση και αντίθετη, στροφή των δύο κόμβων του 2 και 4, οι οποίοι παραμένουν οριζοντίως αμετάθετοι (Σχ. 15.18).



Σχήμα 15.18 Η παραμόρφωση (ποιοτικά) του φορέα για συμμετρική φόρτιση.

Επομένως, δεδομένων των σχέσεων $\varphi_4 = -\varphi_2$ και $\psi_{12} = \psi_{45} = 0$, υφίσταται ένα μόνον άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος: η στροφή φ_2 του κόμβου 2. Έτσι, ως ΓΚΣ θεωρούμε τον αρχικό φορέα με δικινητά πακτωμένους τους δύο κόμβους του 2 και 4, ενώ η μοναδιαία κατάσταση “ $\Xi_1=1$ ”, που απαιτείται για την επίλυση του φορέα, αποτελείται από την ομάδα υπεραριθμών “ $\varphi_2=1$ ” και “ $\varphi_4=-1$ ”, που επιβάλλονται ταυτόχρονα στο ΓΚΣ:

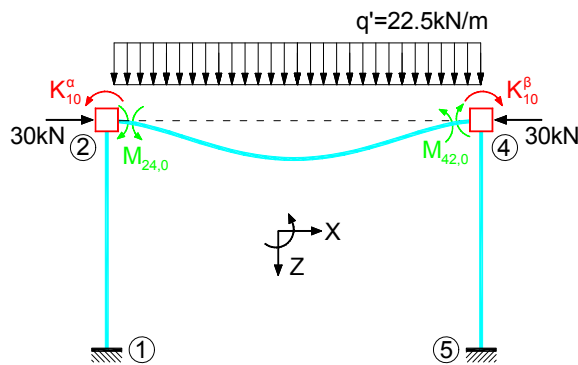
$$“\Xi_1=1” \rightarrow \{“\varphi_2=1” \text{ και } “\varphi_4=-1”\}.$$

Το άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος Ξ_1 δεν είναι , πλέον, ένα μοναχικό μέγεθος (μια μοναχική στροφή), αλλά αποτελείται από το ζεύγος στροφών $\varphi_2=1$ και $\varphi_4=-1$.

Ακολουθως, περιγράφεται συνοπτικά η, κατά τα λοιπά, συνήθης διαδικασία επίλυσης με τη ΜΜ (βλ. Σχ. 15.19 έως Σχ. 15.21).

Κατάσταση “0”

- “0”: $\{\varphi_2 = \varphi_4 = 0\}$



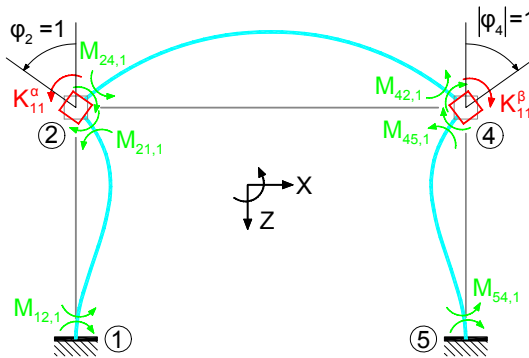
$$M_{24,0} = \frac{q' \cdot L_{24}^2}{12} = 46.875 \text{ kNm}$$

$$M_{42,0} = -\frac{q' \cdot L_{24}^2}{12} = -46.875 \text{ kNm}$$

Σχήμα 15.19 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση “0” (μηδενικές μετακινήσεις κόμβων).

Κατάσταση " $\Xi_I=1$ "

- " $\Xi_I=1$ ": $\{\varphi_2=1, \varphi_4=-1\}$



$$M_{12,1} = -M_{54,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 66666.67 \text{ kNm/rad}$$

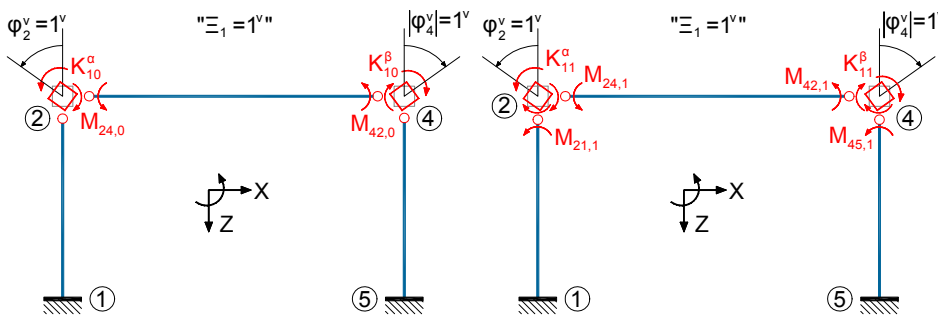
$$M_{21,1} = -M_{45,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 133333.3 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{24,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot \varphi_4 = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot 1 + 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot (-1) = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) = 40000 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{42,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot \varphi_4 = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot 1 + 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot (-1) = -2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) = -40000 \text{ kNm/rad}$$

Σχήμα 15.20 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\Xi_I=1$ " (ταυτόχρονη επιβολή $\varphi_2=1$ και $\varphi_4=-1$).

Υπολογισμός συντελεστών φόρτισης και σιβαρότητας



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{10}^\alpha \cdot \varphi_2^v + K_{10}^\beta \cdot |\varphi_4^v| - M_{24,0} \cdot \varphi_2^v + M_{42,0} \cdot |\varphi_4^v| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{10}^\alpha \cdot 1^v + K_{10}^\beta \cdot 1^v - 46.875 \cdot 1^v + (-46.875) \cdot 1^v = 0 \Rightarrow K_{10} = K_{10}^\alpha + K_{10}^\beta = 93.75 \text{ kNm}$$

$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{11}^\alpha \cdot \varphi_2^v + K_{11}^\beta \cdot |\varphi_4^v| - (M_{24,1} + M_{21,1}) \cdot \varphi_2^v + (M_{45,1} + M_{42,1}) \cdot |\varphi_4^v| = 0$$

$$\Rightarrow K_{11}^\alpha \cdot 1^v + K_{11}^\beta \cdot 1^v - (40000 + 133333.3) \cdot 1^v + (-133333.33 - 40000) \cdot 1^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{11}^\alpha + K_{11}^\beta - 346666.67 = 0 \Rightarrow K_{11} = K_{11}^\alpha + K_{11}^\beta = 346666.67 \text{ kNm/rad}$$

Σχήμα 15.21 Ταυτόχρονες δυνατές στροφές $\varphi_2^v=1^v$ και $\varphi_4^v=-1^v$ για τον υπολογισμό των συντελεστών φόρτισης K_{10} και σιβαρότητας K_{11} .

Υπολογισμός του υπεράριθμου γεωμετρικού μεγέθους ξ_1

$$346666.67 \cdot \xi_1 + 93.75 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \left(-\frac{93.75}{346666.67} \right) \Rightarrow \xi_1 = -2.704 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Με τη σχέση επαλληλίας $M_{ij} = M_{ij,0} + M_{ij,1} \cdot \xi_1$, υπολογίζονται οι καμπτικές ροπές (Σημ.: Τα πρόσημα των ροπών αυτών είναι ήδη προσαρμοσμένα στη σύμβαση της ίνας αναφοράς):

$$M_{12} = M_{54} = 0 + (-66666.67) \cdot (-2.704 \cdot 10^{-4}) = 18.03 \text{ kNm}$$

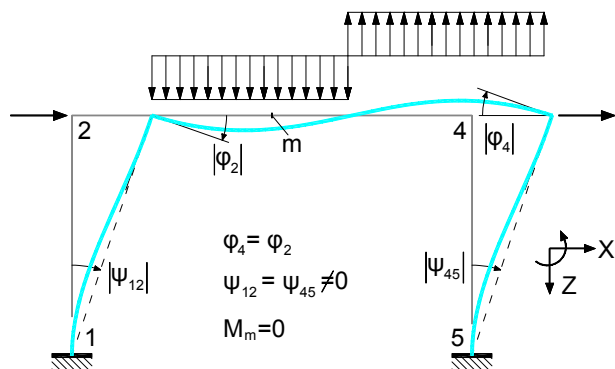
$$M_{21} = M_{45} = -[0 + (-133333.33) \cdot (-2.704 \cdot 10^{-4})] = -36.06 \text{ kNm}$$

$$M_{24} = M_{42} = -46.875 + (-40000) \cdot (-2.704 \cdot 10^{-4}) = -36.06 \text{ kNm}$$

Οι παραπάνω ροπές συμπίπτουν με τις ροπές του διαγράμματος του σχήματος 15.15(α). Επομένως, ίδιες θα είναι και οι αντίστοιχες τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις (βλ. Σχ. 15.16(α) και Σχ. 15.17(α)).

(β2) Αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Όταν ο ατενής φορέας του σχήματος 15.0 φορτίζεται με αντισυμμετρική φόρτιση, η παραμόρφωσή του συνίσταται σε μία οριζόντια μετάθεση των κόμβων 2 και 4 (διατηρούμενης, βεβαίως, λόγω της ατένειας του ζυγώματος της αμοιβαίας τους απόστασης), και στην ταυτόχρονη, ίση και ομόσημη στροφή των κόμβων 2 και 4 (Σχ. 15.22). Η παραμόρφωση αυτή περιγράφεται πλήρως από δύο μεγέθη μετακίνησης: τη γωνία στροφής φ_2 του κόμβου 2 (ή φ_4 του κόμβου 4) και τη γωνία στροφής ψ_{12} της χορδής 1-2 (ή ψ_{45} της χορδής 4-5), που για αυτό και αποτελούν τα υπεράριθμα μεγέθη του προβλήματος.



Σχήμα 15.22 Η παραμόρφωση (ποιοτικά) του φορέα για αντισυμμετρική φόρτιση.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ως ΓΚΣ θεωρούμε τον αρχικό φορέα με δικινητά πακτωμένους τους κόμβους 2 και 4, και με δικινητή πάκτωση της χορδής της δοκού 1-2. Οι δύο αντίστοιχες μοναδιαίες καταστάσεις, που απαιτούνται για την επίλυση του φορέα, είναι οι εξής:

$$“\Xi_1=1” \rightarrow \{“\varphi_2=1” \text{ και } “\varphi_4=1”\}$$

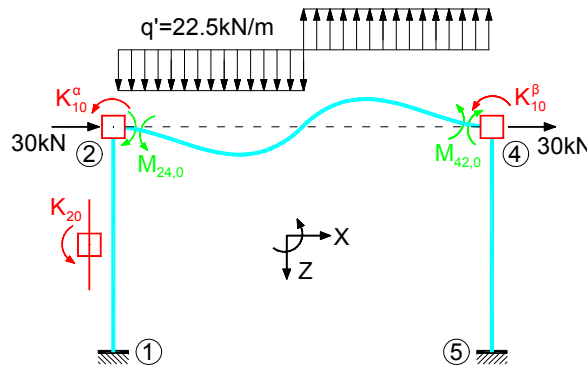
$$“\Xi_2=1” \rightarrow \{“\psi_{12}=1”\}$$

Η πρώτη εξ αυτών αποτελείται από την ομάδα υπεράριθμων “ $\varphi_2=1$ ” και “ $\varphi_4=1$ ”, που εφαρμόζονται ταυτόχρονα στο ΓΚΣ. Δηλαδή, το άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος Ξ_1 δεν είναι ένα μοναχικό μέγεθος (μία μοναχική στροφή), αλλά αποτελείται από το ζεύγος στροφών $\varphi_2=1$ και $\varphi_4=1$.

Ακολούθως, περιγράφεται η, κατά τα λοιπά, συνήθης διαδικασία επίλυσης με τη MM (βλ. Σχ. 15.23 έως Σχ. 15.27).

Καταστάσεις "0", "Ξ₁=1" και "Ξ₂=1"

- "0": {φ₂ = φ₄ = ψ₁₂ = 0}



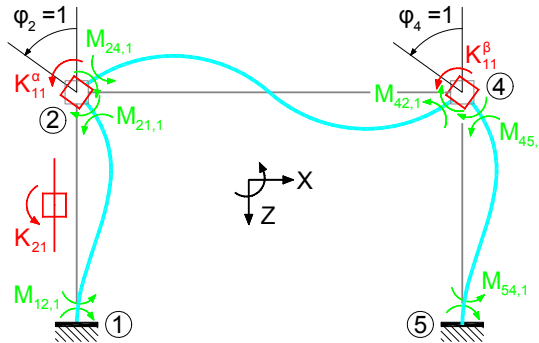
$$M_{24,0} = \frac{q' \cdot (L_{24}/2)^2}{8} = 17.58 \text{ kNm}$$

$$M_{42,0} = \frac{q' \cdot (L_{24}/2)^2}{8} = 17.58 \text{ kNm}$$

Σχήμα 15.23 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0".

[Σημ.: Ο υπολογισμός των ροπών στα άκρα 2 και 4 γίνεται με βάση το γεγονός ότι, τόσο η ροπή όσο και η βύθιση στο μέσο του ανοίγματος της δοκού 2-4 (Σημείο m, βλ. Σχ. 15.22) είναι ίσες με το μηδέν. Επομένως, τα δύο ημίσεια του ανοίγματος μπορούν να θεωρηθούν ως μονόπακτες δοκοί με ομοιόμορφη φόρτιση, οπότε οι αναπτυσσόμενες ροπές προκύπτουν από τους πίνακες 2α και 2β.]

- "Ξ₁=1": {φ₂ = 1, φ₄ = 1}



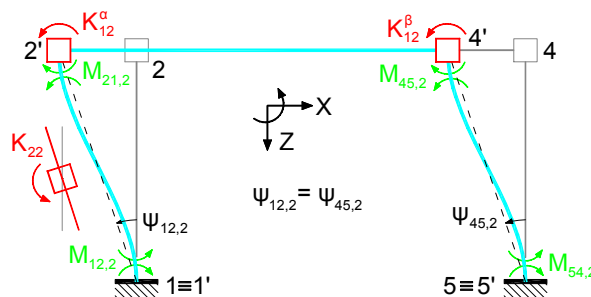
$$M_{12,1} = M_{54,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}}\right) \cdot \varphi_2 = 66666.67 \text{ kNm} \quad M_{21,1} = M_{45,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}}\right) \cdot \varphi_2 = 133333.3 \text{ kNm}$$

$$M_{24,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}}\right) \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}}\right) \cdot \varphi_4 = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}}\right) \cdot 1 + 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}}\right) \cdot 1 = \left(\frac{6 \cdot EI}{L_{24}}\right) = 120000 \text{ kNm}$$

$$M_{42,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}}\right) \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}}\right) \cdot \varphi_4 = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}}\right) \cdot 1 + 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}}\right) \cdot 1 = 6 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}}\right) = 120000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 15.24 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "Ξ₁=1" (ταυτόχρονη επιβολή φ₂=1 και φ₄=1).

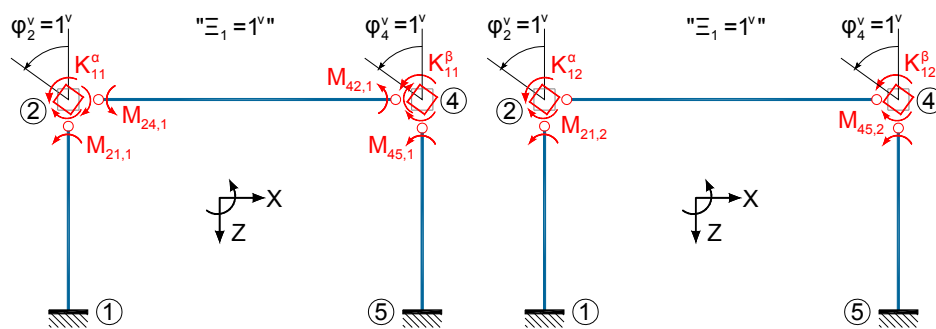
- "Ξ₂=1": {ψ₁₂ = 1}



$$M_{12,2} = M_{54,2} = -6 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}}\right) \cdot \psi_{12,2} = -200000 \text{ kNm} \quad M_{21,2} = M_{45,2} = -6 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}}\right) \cdot \psi_{12,2} = -200000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 15.25 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "Ξ₂=1" (επιβολή ψ₁₂=1).

Υπολογισμός συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{11}^a \cdot \varphi_2^v + K_{11}^b \cdot \varphi_4^v - (M_{24,1} + M_{21,1}) \cdot \varphi_2^v - (M_{45,1} + M_{42,1}) \cdot \varphi_4^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{11}^a \cdot 1^v + K_{11}^b \cdot 1^v - (120000 + 133333.3) \cdot 1^v - (133333.33 + 120000) \cdot 1^v = 0$$

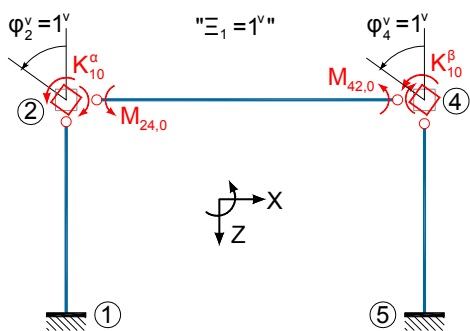
$$\Rightarrow K_{11}^a + K_{11}^b - 506666.67 = 0 \Rightarrow K_{11} = K_{11}^a + K_{11}^b = 506666.67 \text{ kNm}$$

$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{12}^a \cdot \varphi_2^v + K_{12}^b \cdot \varphi_4^v - M_{21,2} \cdot \varphi_2^v - M_{45,2} \cdot \varphi_4^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{12}^a \cdot 1^v + K_{12}^b \cdot 1^v - (-200000) \cdot 1^v - (-200000) \cdot 1^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{12}^a + K_{12}^b + 400000 = 0 \Rightarrow K_{12} = K_{12}^a + K_{12}^b = -400000 \text{ kNm}$$

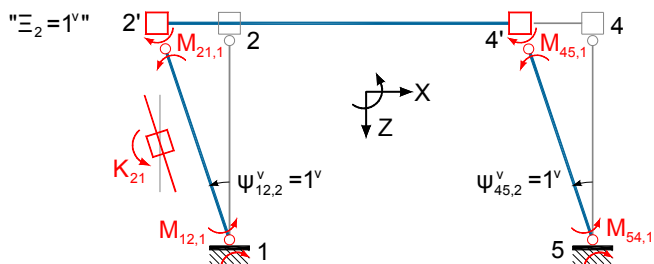
Σχήμα 15.26-1 Ταυτόχρονες δυνατές στροφές $\varphi_2^v = 1^v$ και $\varphi_4^v = 1^v$ για τον υπολογισμό των συντελεστών στιβαρότητας K_{11} και K_{12} .



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{10}^a \cdot \varphi_2^v + K_{10}^b \cdot \varphi_4^v - M_{24,0} \cdot \varphi_2^v - M_{42,0} \cdot \varphi_4^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{10}^a \cdot 1^v + K_{10}^b \cdot 1^v - 17.58 \cdot 1^v - 17.58 \cdot 1^v = 0 \Rightarrow K_{10} = K_{10}^a + K_{10}^b = 35.16 \text{ kNm}$$

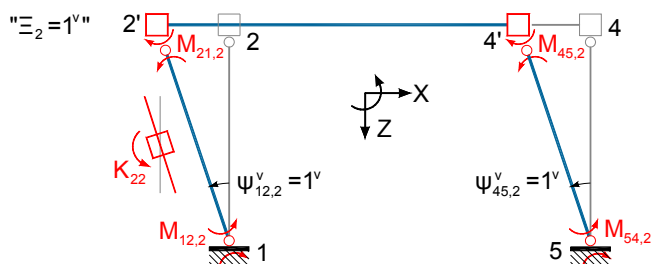
Σχήμα 15.26-2 Ταυτόχρονες δυνατές στροφές $\varphi_2^v = 1^v$ και $\varphi_4^v = 1^v$ για τον υπολογισμό του συντελεστή φόρτισης K_{10} .



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{21} \cdot 1^v + (M_{12,1} + M_{21,1}) \cdot \psi_{12,2}^v + (M_{45,1} + M_{54,1}) \cdot \psi_{45,2}^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{21} \cdot 1^v + (66666.67 + 133333.33) \cdot 1^v + (66666.67 + 133333.33) \cdot 1^v = 0$$

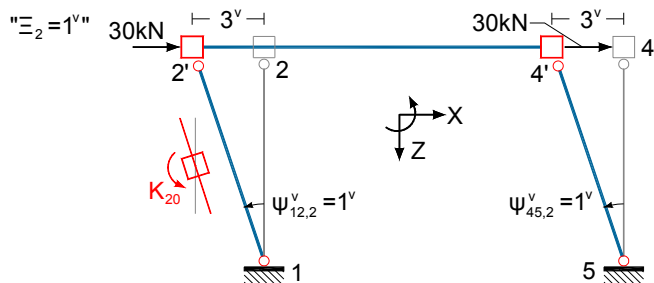
$$\Rightarrow K_{21} = -400000 \text{ kNm}$$



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{22} \cdot 1^v + (M_{12,2} + M_{21,2}) \cdot \psi_{12,2}^v + (M_{45,2} + M_{54,2}) \cdot \psi_{45,2}^v = 0$$

$$\Rightarrow K_{22} \cdot 1^v + (-200000 - 200000) \cdot 1^v + (-200000 - 200000) \cdot 1^v = 0 \Rightarrow K_{22} = 800000 \text{ kNm}$$

Σχήμα 15.27-1 Δυνατή στροφή $\Xi_2 = 1^v$ για τον υπολογισμό των συντελεστών K_{21} και K_{22} .



$$W_e^v = 0 \Rightarrow K_{20} \cdot 1^v - 30 \cdot 3^v - 30 \cdot 3^v = 0 \Rightarrow K_{20} - 90 - 90 = 0 \Rightarrow K_{20} = 180 \text{ kNm}$$

Σχήμα 15.27-2 Δυνατή στροφή $\Xi_2 = 1^v$ για τον υπολογισμό του συντελεστή φόρτισης K_{20} .

Υπολογισμός των υπεραρίθμων γεωμετρικών μεγεθών Ξ_1 και Ξ_2

$$\left. \begin{aligned} 506666.67 \cdot \Xi_1 - 400000 \cdot \Xi_2 &= -35.16 \\ -400000 \cdot \Xi_1 + 800000 \cdot \Xi_2 &= -180 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \Xi_1 &= -4.081 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ \Xi_2 &= -4.291 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \end{aligned}$$

Με τη σχέση επαλληλίας $M_{ij} = M_{i,j,0} + M_{i,j,1} \cdot \Xi_1 + M_{i,j,2} \cdot \Xi_2$ υπολογίζονται οι καμπτικές ροπές (Σημ.: Τα πρόσημα των ροπών αυτών είναι ήδη προσαρμοσμένα στη σύμβαση της ίνας αναφοράς):

$$M_{12} = -M_{54} = 0 + (-66666.67) \cdot (-4.081 \cdot 10^{-4}) + (200000) \cdot (-4.291 \cdot 10^{-4}) = -58.60 \text{ kNm}$$

$$M_{21} = -M_{45} = -[0 + (-133333.33) \cdot (-4.081 \cdot 10^{-4}) + (200000) \cdot (-4.291 \cdot 10^{-4})] = 31.39 \text{ kNm}$$

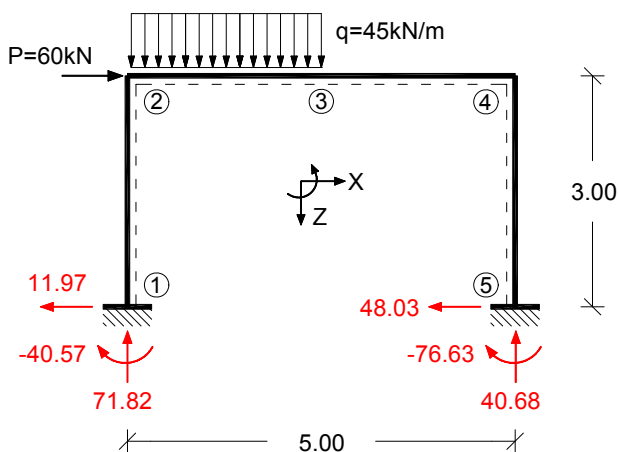
$$M_{24} = -M_{42} = -17.58 + (-120000) \cdot (-4.081 \cdot 10^{-4}) = 31.39 \text{ kNm}$$

Οι παραπάνω ροπές συμπίπτουν με τις ροπές του διαγράμματος του σχήματος 15.15(β). Επομένως, ίδιες θα είναι και οι αντίστοιχες τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις (βλ. Σχ. 15.16(β) και Σχ. 15.17(β)).

Έτσι, τα τελικά διαγράμματα M, Q, N λόγω της δεδομένης φόρτισης, τα οποία προκύπτουν από τη διαδικασία επίλυσης με εισαγωγή των ομάδων υπεραριθμών μεγεθών, είναι ίδια με τα διαγράμματα των σχημάτων 15.15(γ), 15.16(γ), και 15.17(γ) αντιστοίχως, τα οποία προέκυψαν με θεώρηση και επίλυση του μισού φορέα.

Έλεγχοι τελικών αποτελεσμάτων

Ακολούθως, διενεργούνται τρεις ισοροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα (βλ. Σχ. 15.28). Οι τιμές των αντιδράσεων στήριξης και ροπών πάκτωσης προέρχονται από τα διαγράμματα των σχημάτων 15.15, 15.16 και 15.17.



$$\sum F_x = 11.97 + 48.03 - 60 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = 71.82 + 40.68 - \left(45 \cdot \frac{5}{2}\right) = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = \frac{1}{2} \cdot 45 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 + (60 \cdot 3) - (40.68 \cdot 5) - 40.57 - 76.63 = 0.025 \approx 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 15.28 Ισοροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Οι τρεις παραπάνω συνθήκες ισοροπίας ικανοποιούνται. Περαιτέρω ισοροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.

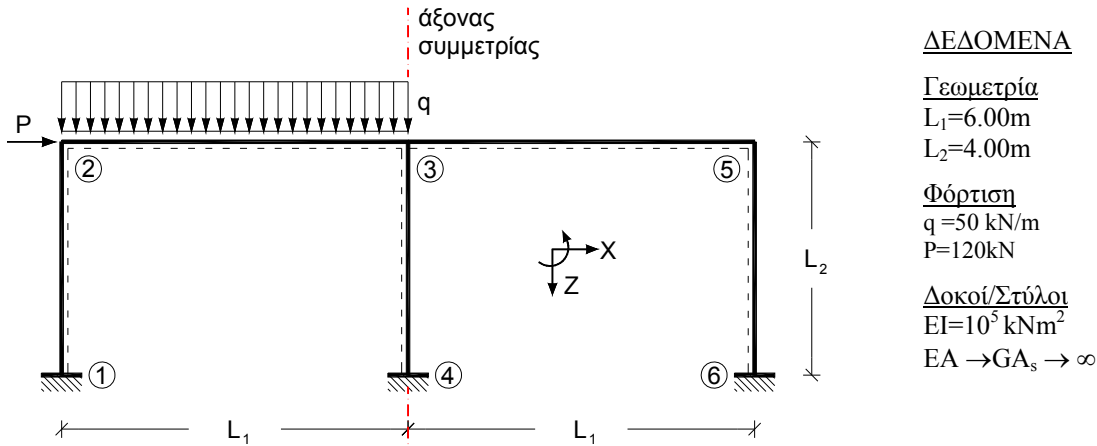
Άσκηση 16

Εκφώνηση

Για τον φορέα του σχήματος 16.0 ζητείται η επίλυση με τη MM και η σχεδίαση των διαγραμμάτων M, Q, N:

- (α) με θεώρηση του μισού φορέα, και
- (β) με εισαγωγή ομάδων υπεραρίθμων μεγεθών.

Σε κάθε βήμα των επιλύσεων να μελετάται και η περίπτωση, κατά την οποία ο μεσαίος στύλος 3-4 δεν είναι ατενής, αλλά έχει πεπερασμένη δυστένεια ίση με $EA_{34}=50000kN$.

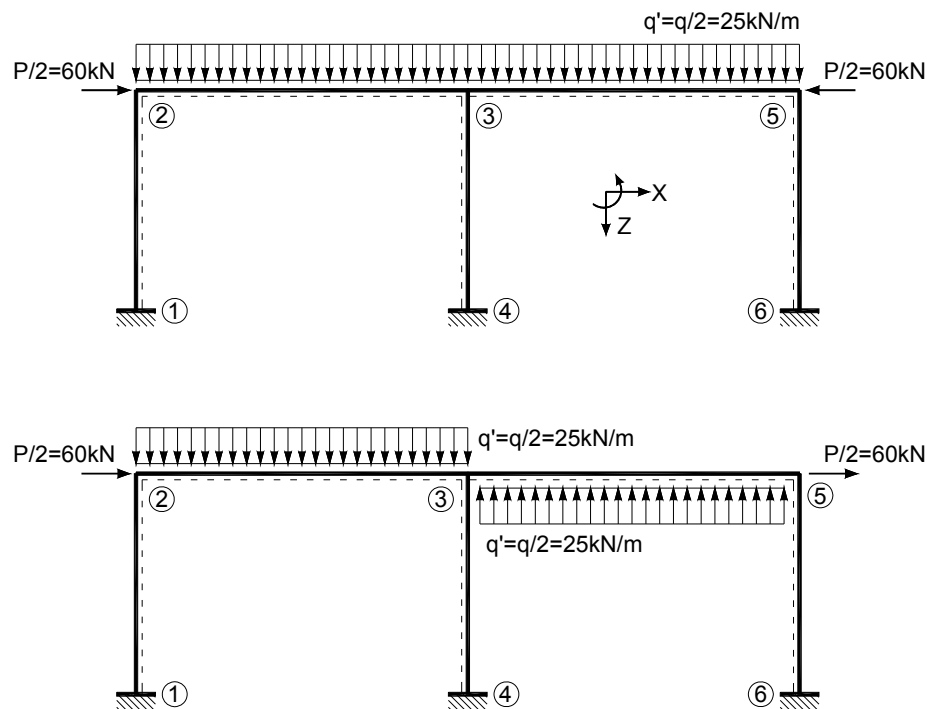


Σχήμα 16.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

(α) Επίλυση με θεώρηση του μισού φορέα

Αναλύεται, κατ' αρχάς, η φόρτιση του φορέα σε μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική συνιστώσα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα 16.1.



Σχήμα 16.1 Ανάλυση της φόρτισης του φορέα σε συμμετρική (α) και αντισυμμετρική (β) συνιστώσα.

(α1) Συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Όπως γνωρίζουμε (βλ. [2], παράγρ. 2.6.2 και 3.6.2), όταν ο άξονας συμμετρίας ενός συμμετρικού και συμμετρικά φορτιζόμενου φορέα συμπίπτει με τον άξονα ενός στοιχείου του φορέα (εδώ: με τον στύλο 3-4), τα μεγέθη έντασης του στοιχείου αυτού ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

- καμπτική ροπή $M=0$ (το στοιχείο, εδώ ο στύλος 3-4, παραμένει απαραμόρφωτο)
- τέμνουσα δύναμη $Q=0$ (συνέπεια του προηγούμενου)
- αξονική δύναμη $N \neq 0$.

Επιπλέον, στον κόμβο 3 του φορέα μας, ισχύουν οι εξής συνθήκες για τις μετακινήσεις:

- κλίση ελαστικής γραμμής (στροφή) $\varphi_3=0$
- οριζόντια μετακίνηση $v_{x3}=0$
- κατακόρυφη μετακίνηση $v_{z3} \neq 0$ (εφόσον $EA_{34} = \text{πεπερασμένη}$).

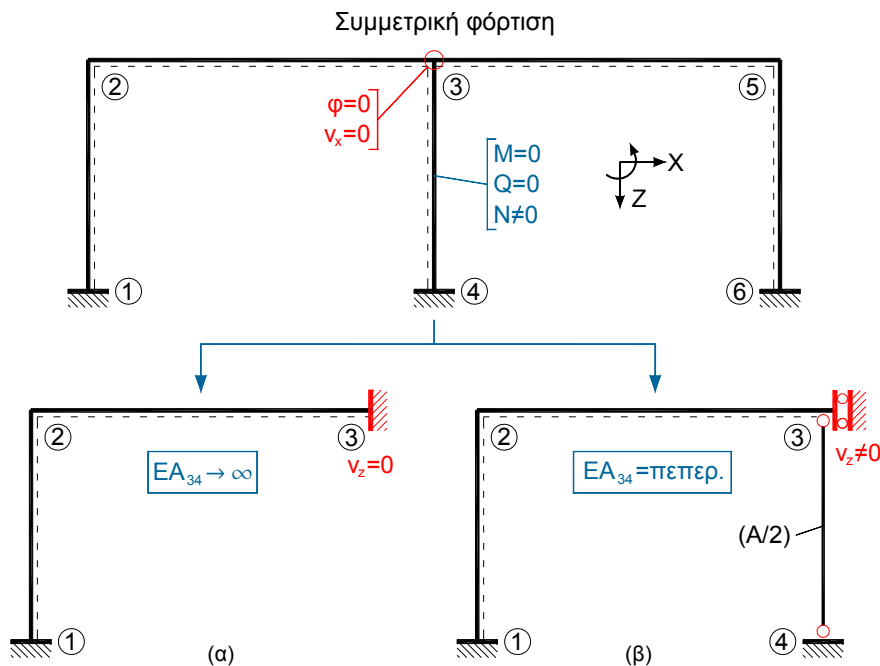
Για την εκτέλεση των υπολογισμών στον μισό φορέα, θα πρέπει να ικανοποιηθούν όλες οι παραπάνω συνθήκες. Πριν, όμως, προχωρήσουμε στους υπολογισμούς, θα εξετάσουμε με συντομία την επίδραση της ατένειας του στοιχείου 3-4, που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας.

- Έστω ότι το στοιχείο 3-4 είναι ατενές ($EA_{34} \rightarrow \infty$)

Αν το στοιχείο που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας είναι ατενές, τότε παύει να ισχύει η συνθήκη $v_{z3} \neq 0$ και ισχύει πλέον $v_{z3}=0$. Στην περίπτωση αυτή, η στήριξη, που πρέπει να τοποθετηθεί στον κόμβο 3 του μισού φορέα, είναι μία πάκτωση (βλ. Σχ. 16.2(α)), ενώ στην αντίθετη περίπτωση, αν, δηλαδή, $EA_{34} = \text{πεπερασμένη}$, θα πρέπει να τοποθετηθεί μία κατακόρυφως κινητή πάκτωση (βλ. Σχ. 16.2(β)). Επιπλέον, στην περίπτωση του ατενούς στοιχείου 3-4 (πάκτωση στον κόμβο 3 του μισού φορέα) είναι, προφανώς, περιττή η συμπερίληψη του (αμφίπακτου πλέον) στοιχείου 3-4 στο προσομοίωμα του μισού φορέα, διότι αυτό αναγκαστικά παραμένει άτονο, αφού μεταξύ των δύο πακτωμένων άκρων του δεν δρα κανένα φορτίο.

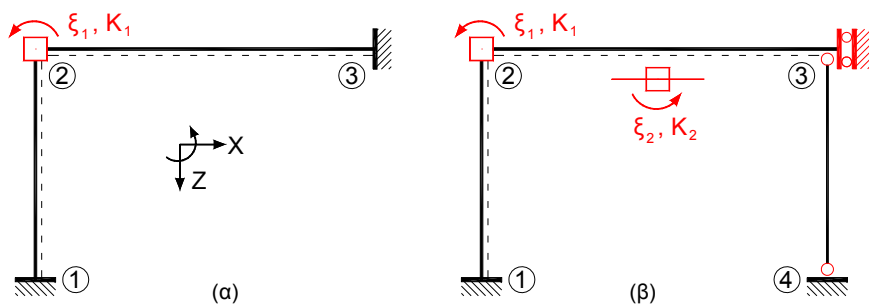
- Έστω ότι το στοιχείο 3-4 δεν είναι ατενές ($EA_{34} = \text{πεπερ.}$)

Αν το στοιχείο που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας έχει πεπερασμένη δυστένεια, τότε το προσομοίωμα του μισού φορέα οφείλει να περιλαμβάνει και το στοιχείο 3-4, διότι αυτό επηρεάζει την παραμόρφωση του φορέα. Επειδή, όμως, το στοιχείο 3-4 βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας, παραμένει σε κάθε περίπτωση καμπτικά απαραμόρφωτο υπό συμμετρική φόρτιση. Κατά συνέπεια, το στοιχείο 3-4 του μισού φορέα θα πρέπει να θεωρηθεί με αρθρώσεις στα δύο άκρα του, έχοντας έτσι τη δυνατότητα μόνον αξονικών παραμορφώσεων και αντίστοιχης αξονικής έντασης. Επιπροσθέτως, επειδή το στοιχείο 3-4 διαχωρίζεται στη μέση από τον άξονα συμμετρίας, οφείλει να ληφθεί υπόψη στο προσομοίωμα του μισού φορέα με τη μισή επιφάνεια της διατομής του, δηλαδή $(A_{34})^{\text{μισός φορέας}} = A/2$. Οι παραπάνω διαπιστώσεις απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα 16.2.



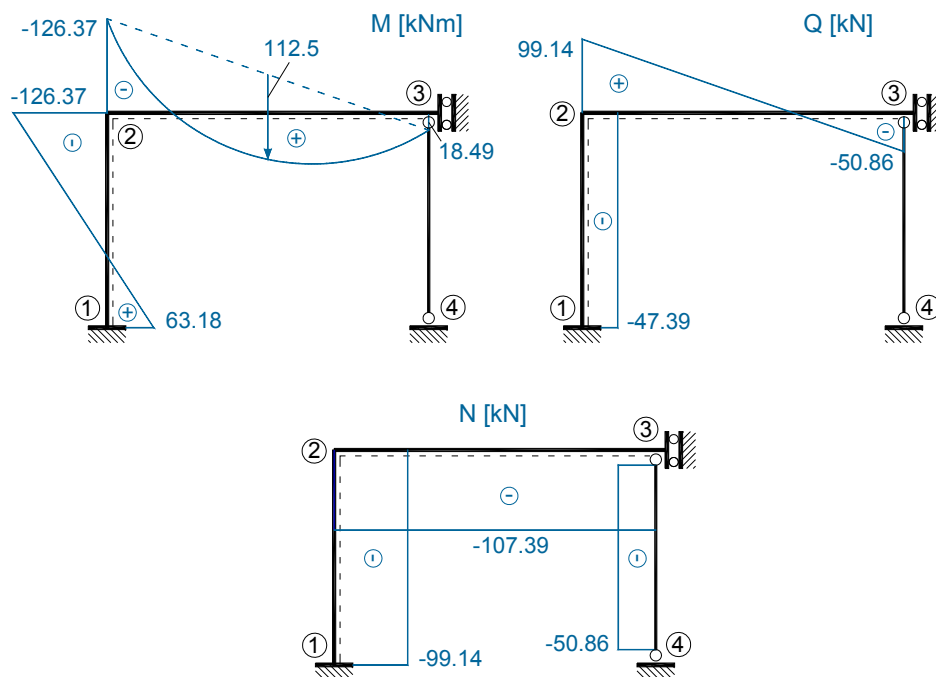
Σχήμα 16.2 Επίλυση στον μισό φορέα για συμμετρική φόρτιση: (α) για $EA_{34} \rightarrow \infty$ και (β) για $EA_{34} = πεπερ.$

Έτσι, εφόσον επιλεγεί η επίλυση του προβλήματος με χρήση του μισού φορέα, ο καθορισμός του ΓΚΣ εξαρτάται από το αν το στοιχείο 3-4 είναι ατενές ή όχι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 16.3.

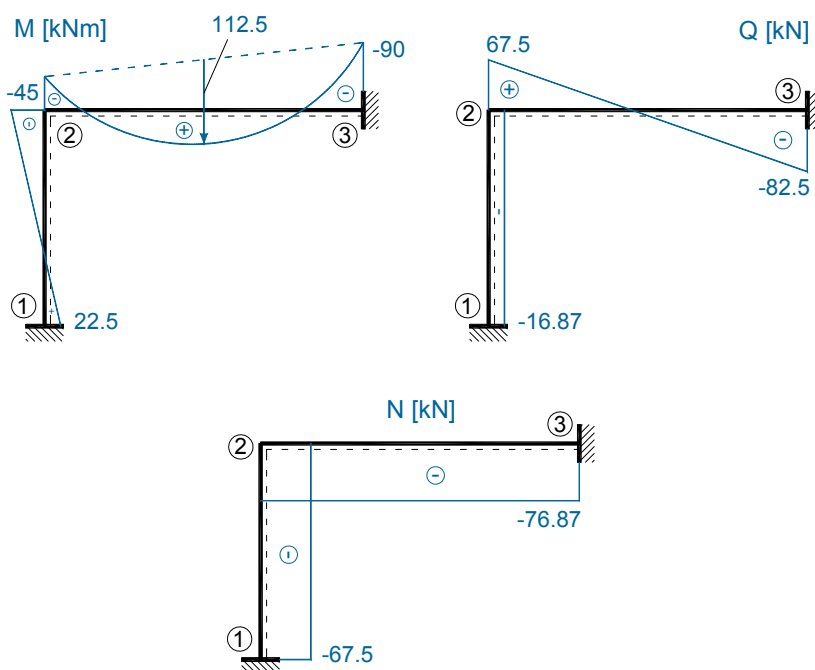


Σχήμα 16.3 ΓΚΣ του μισού φορέα για συμμετρική φόρτιση: (α) για $EA_{34} \rightarrow \infty$ και (β) για $EA_{34} = πεπερ.$

Η επίλυση με βάση οποιοδήποτε από τα δύο ΓΚΣ του σχήματος 16.3 μπορεί να γίνει εύκολα με την ήδη γνωστή από τις προηγούμενες ασκήσεις διαδικασία και δεν θα παρουσιαστεί αναλυτικά εδώ. Παρακάτω δίνονται, απλώς, τα διαγράμματα M, Q και N και για τις δύο αυτές περιπτώσεις (βλ. Σχ. 16.4 και Σχ. 16.5).



Σχήμα 16.4 Διαγράμματα M, Q, N του μισού φορέα με $EA_{34} = \text{πεπερ.}$ υπό συμμετρική φόρτιση.



Σχήμα 16.5 Διαγράμματα M, Q, N του μισού φορέα με $EA_{34} \rightarrow \infty$ υπό συμμετρική φόρτιση.

(α2) Αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Σύμφωνα με ένα ανάλογο προς την περίπτωση της συμμετρικής φόρτισης σκεπτικό (βλ. [2], παράγρ. 2.6.2 και 3.6.2), προκύπτει ότι, όταν ο άξονας συμμετρίας ενός συμμετρικού και αντισυμμετρικά φορτιζόμενου φορέα συμπίπτει με τον άξονα ενός στοιχείου του φορέα (εδώ: με τον στύλο 3-4), τα μεγέθη έντασης του στοιχείου αυτού ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

- καμπτική ροπή $M \neq 0$
- τέμνουσα δύναμη $Q \neq 0$

- αξονική δύναμη $N=0$.

Επιπλέον, στον κόμβο 3 του φορέα μας ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες για τις μετακινήσεις:

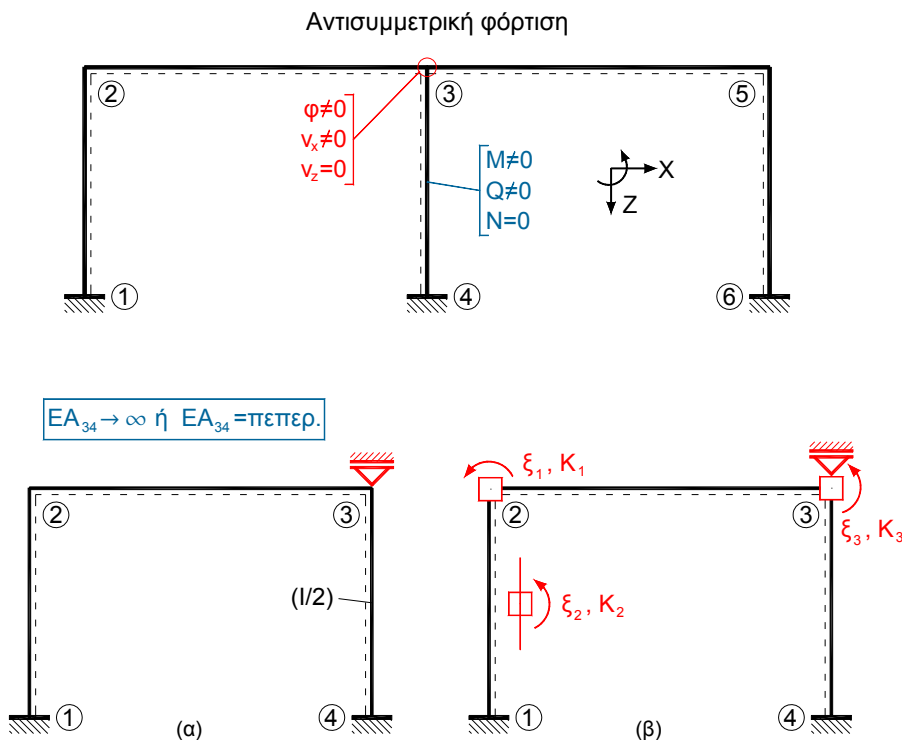
- κλίση ελαστικής γραμμής $\varphi \neq 0$
- οριζόντια μετακίνηση $v_{x3} \neq 0$
- κατακόρυφη μετακίνηση $v_{z3} = 0$.

Στην περίπτωση αυτή, για να διενεργηθούν οι υπολογισμοί στον μισό φορέα θα πρέπει, από πλευράς κινηματικών συνθηκών, να εξασφαλιστεί μηδενική βύθιση στον κόμβο 3 ($v_{z3} = 0$). Αυτό σημαίνει, ότι θα πρέπει να τοποθετηθεί μία οριζόντια κύλιση στον κόμβο αυτό, έτσι ώστε να εμποδιστεί η μετατόπισή του κατά τον κατακόρυφο άξονα Z.

Όσον αφορά στις συνθήκες, τις οποίες πρέπει να ικανοποιούν τα μεγέθη έντασης του στοιχείου 3-4, που ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας, ισχύουν τα ακόλουθα:

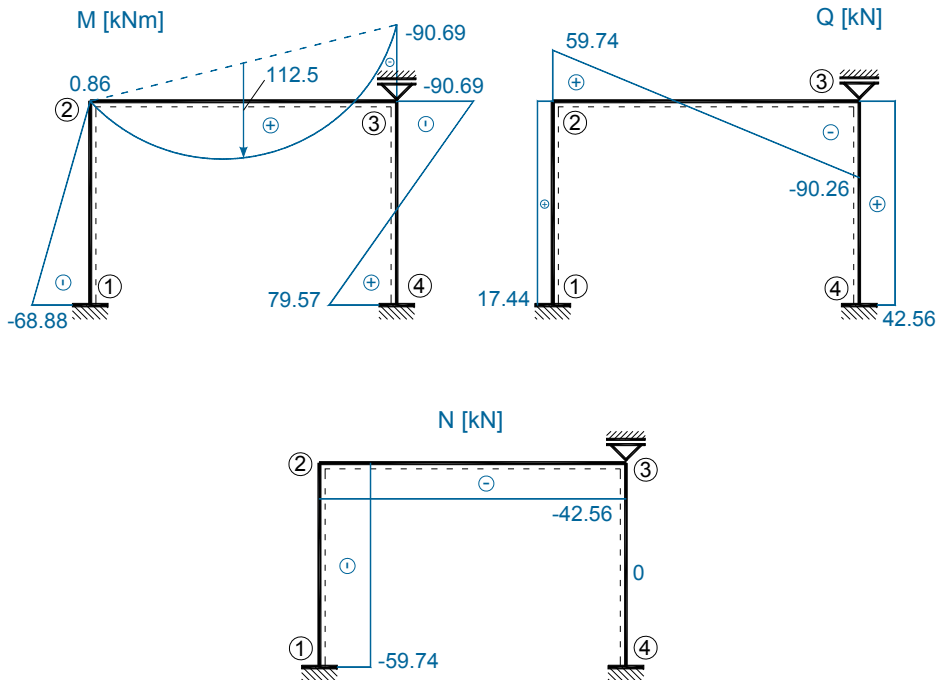
- (1) Εφόσον το στοιχείο αυτό διαχωρίζεται στη μέση από τον άξονα συμμετρίας, η ροπή αδράνειας του στοιχείου στο προσομοίωμα του μισού φορέα θα λαμβάνεται ίση με το ήμισυ της πραγματικής του ροής αδράνειας (βλ. Σχ. 16.6(α)). Αντίστοιχα, και εφόσον λαμβάνονται υπόψη και οι διατμητικές παραμορφώσεις των στοιχείων, θα πρέπει και η τεκμαρτή επιφάνεια διάτμησης να λαμβάνεται ίση με το ήμισυ της πραγματικής.
- (2) Εφόσον η αξονική δύναμη του στοιχείου 3-4 είναι ίση με το μηδέν, απαιτείται στο προσομοίωμα του μισού φορέα η εισαγωγή μίας αξονικής άρθρωσης σε ένα από τα δύο άκρα του στοιχείου αυτού. Ωστόσο, η οριζόντια κύλιση, που τοποθετήθηκε στον κόμβο 3 (προς ικανοποίηση των κινηματικών συνθηκών που περιγράφηκαν προηγουμένως), αντιστοιχεί με μία δεσμική ράβδο κατά τη διεύθυνση του άξονα του στοιχείου 3-4, η οποία δεν επιτρέπει τη μεταφορά αξονικής έντασης στο στοιχείο. Συνεπώς, η εισαγωγή της αξονικής άρθρωσης δεν είναι αναγκαία.
- (3) Στην περίπτωση αντισυμμετρικής φόρτισης, είναι αδιάφορο αν το στοιχείο 3-4 είναι ατενές ή όχι, διότι η πρόσθετη οριζόντια κύλιση στον κόμβο 3 παραλαμβάνει κάθε κατακόρυφο φορτίο, διατηρώντας, όπως τονίστηκε προηγουμένως, αξονικά αφόρτιστο το στοιχείο 3-4, το οποίο, έτσι, παραμένει αξονικά απαραμόρφωτο, ακόμη και στην περίπτωση που έχει πεπερασμένη δυστένεια.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, το προσομοίωμα του μισού φορέα για την περίπτωση της αντισυμμετρικής φόρτισης καθώς και το αντίστοιχο ΓΚΣ δίνονται στο παρακάτω σχήμα 16.6.



Σχήμα 16.6 Επίλυση στον μισό φορέα για αντισυμμετρική φόρτιση: (α) προσομοίωμα (β) ΓΚΣ.

Η επίλυση του φορέα του σχήματος 16.6α με τη ΜΜ μπορεί να γίνει εύκολα με την ήδη γνωστή από τις προηγούμενες ασκήσεις διαδικασία και δεν θα παρουσιαστεί αναλυτικά εδώ. Παρακάτω δίνονται, απλώς, τα διαγράμματα M , Q και N και για τις δύο αυτές περιπτώσεις (βλ. Σχ. 16.7).



Σχήμα 16.7 Διαγράμματα M , Q και N του μισού φορέα υπό αντισυμμετρική φόρτιση.

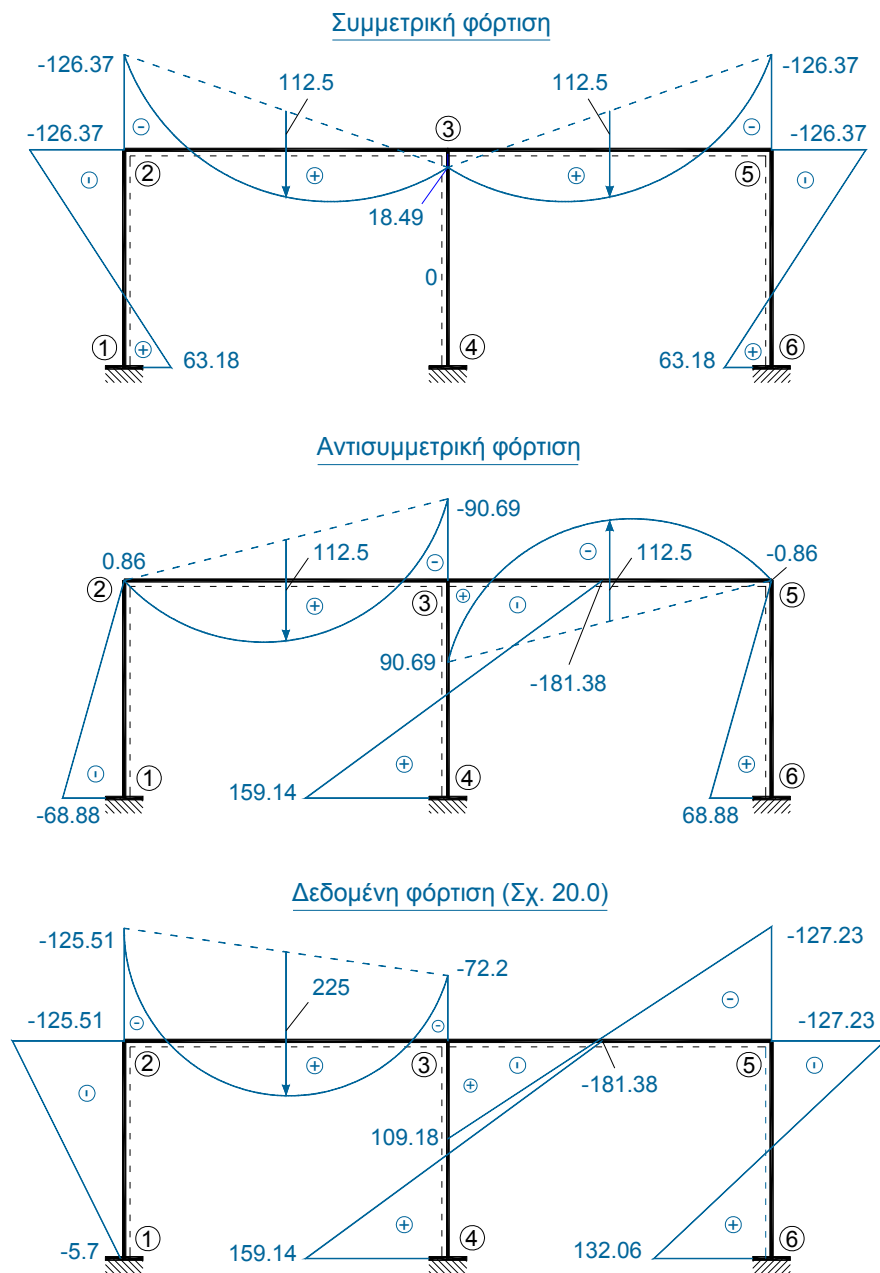
(α3) Τελικά διαγράμματα

Τα τελικά διαγράμματα ροπών, τεμνουσών και αξονικών δυνάμεων του φορέα υπό τη δεδομένη φόρτιση προκύπτουν για μεν την περίπτωση που το στοιχείο 3-4 έχει πεπερασμένη δυστένεια από την επαλληλία των διαγραμμάτων των σχημάτων 16.4 και 16.7, για δε την περίπτωση που το στοιχείο 3-4 είναι ατενές από την επαλληλία των διαγραμμάτων των σχημάτων 16.5 και 16.7.

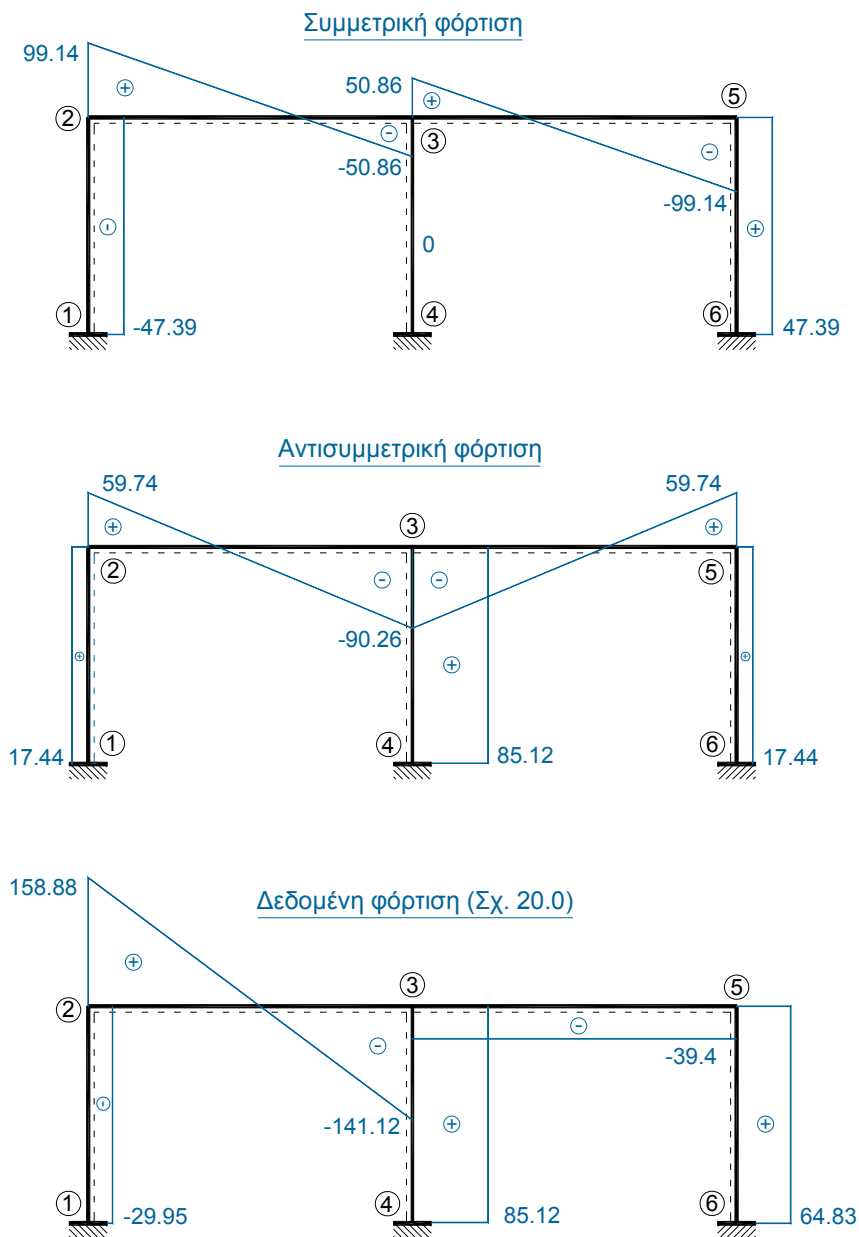
Για τις επαλληλίες αυτές θα πρέπει να ληφθεί υπόψη:

- (i) ότι τα διαγράμματα ροπών συμμετρικών φορέων υπό συμμετρική φόρτιση είναι συμμετρικά, ενώ υπό αντισυμμετρική φόρτιση είναι αντισυμμετρικά,
- (ii) ότι τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων συμμετρικών φορέων υπό συμμετρική φόρτιση είναι αντισυμμετρικά, ενώ υπό αντισυμμετρική φόρτιση είναι συμμετρικά, και
- (iii) ότι τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων συμμετρικών φορέων υπό συμμετρική φόρτιση είναι συμμετρικά, ενώ υπό αντισυμμετρική φόρτιση είναι αντισυμμετρικά.

A. Τελικά διαγράμματα για την περίπτωση που $EA_{34} = πεπερ. = 50000kN$

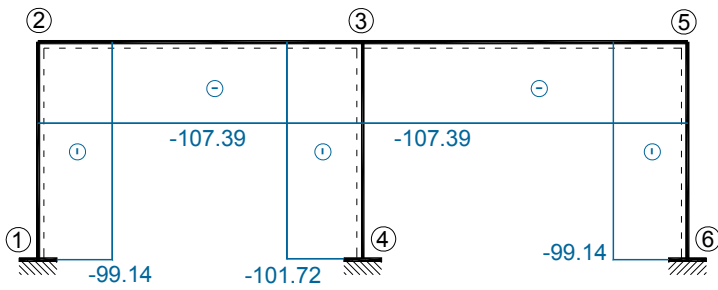


Σχήμα 16.8-1 Διαγράμματα καμπτικών ρομών M για την περίπτωση που $EA_{34} = πεπερ.$

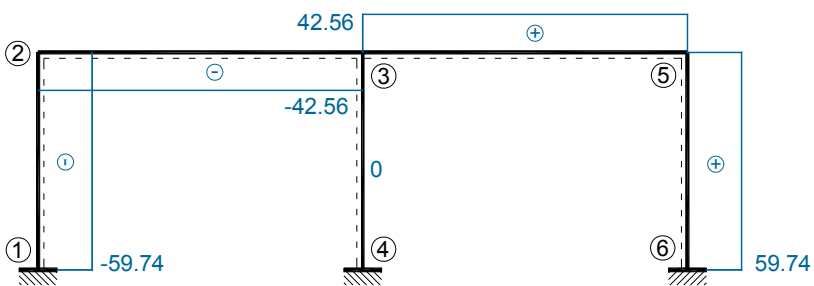


Σχήμα 16.8-2 Διαγράμματα τεμνουσών δυνεων Q για την περίπτωση που $EA_{34} = πεπερ.$.

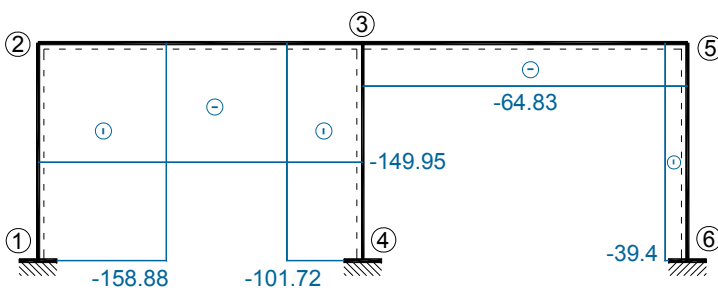
Συμμετρική φόρτιση



Αντισυμμετρική φόρτιση



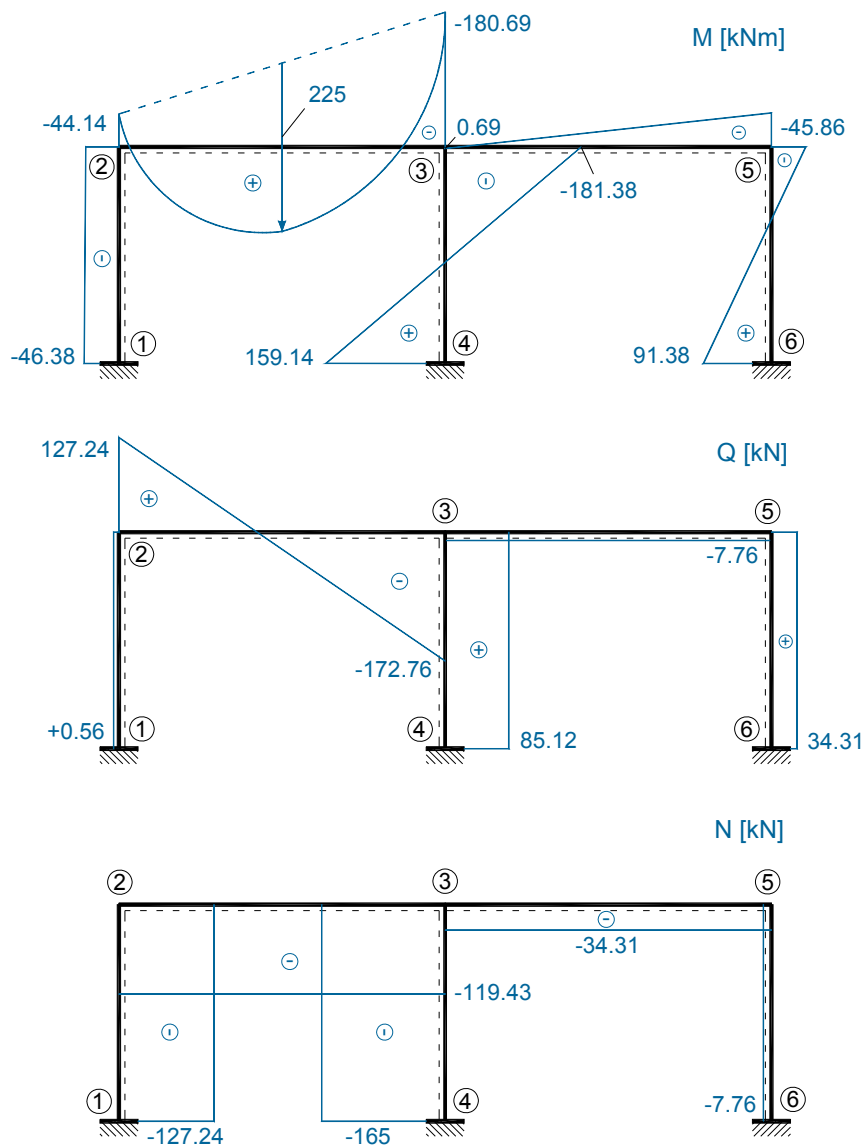
Δεδομένη φόρτιση (Σχ. 20.0)



Σχήμα 16.8-3 Διαγράμματα αξονικών δυνάμεων N για την περίπτωση που $EA_{34} = πεπερ.$

B. Τελικά διαγράμματα για την περίπτωση που $EA_{34} \rightarrow \infty$

Ακολουθώντας το ίδιο σκεπτικό επαλληλίας, υπολογίζονται τα τελικά διαγράμματα M, Q και N υπό τη δεδομένη φόρτιση και για την περίπτωση που $EA_{34} \rightarrow \infty$ (βλ. Σχ. 16.9).



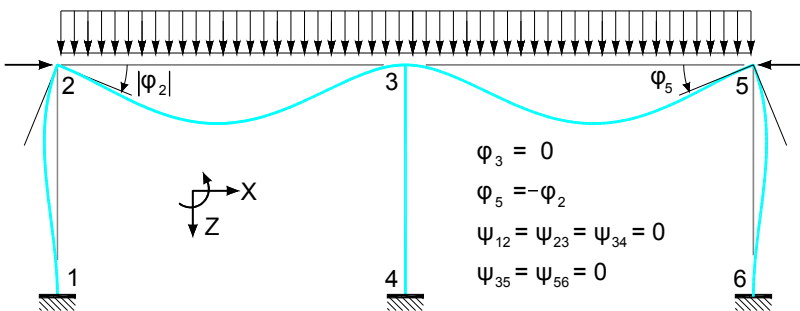
Σχήμα 16.9 Διαγράμματα M, Q και N για την περίπτωση που $EA_{34} \rightarrow \infty$.

(β) Επίλυση με εισαγωγή ομάδων υπεραρίθμων μεγεθών

Η διαδικασία επίλυσης με την εισαγωγή ομάδων υπεραρίθμων μεγεθών προϋποθέτει, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση που χρησιμοποιήθηκε ο μισός φορέας, την ανάλυση της φόρτισης σε συμμετρική και αντισυμμετρική, σύμφωνα με το σχήμα 16.1. Για τον ορισμό των ομάδων υπεραρίθμων μεγεθών, θα πρέπει να εντοπιστούν τα γεωμετρικά μεγέθη, που καθορίζουν την παραμόρφωση του φορέα για τη συμμετρική και την αντισυμμετρική φόρτιση, και, κατόπιν, να ευρεθεί ποια από αυτά σχετίζονται μεταξύ τους.

(β1) Συμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Όταν ο ατενής και συμμετρικός φορέας του σχήματος 16.0 φορτίζεται με συμμετρική φόρτιση, η παραμόρφωσή του συνίσταται στην ίση και αντίθετη στροφή των δύο κόμβων του 2 και 5, ενώ ο κόμβος 3, που βρίσκεται επάνω στον άξονα συμμετρίας παραμένει άστρεπτος. Παράλληλα, κανένας κόμβος δεν υφίσταται μετατόπιση (Σχ. 16.10).



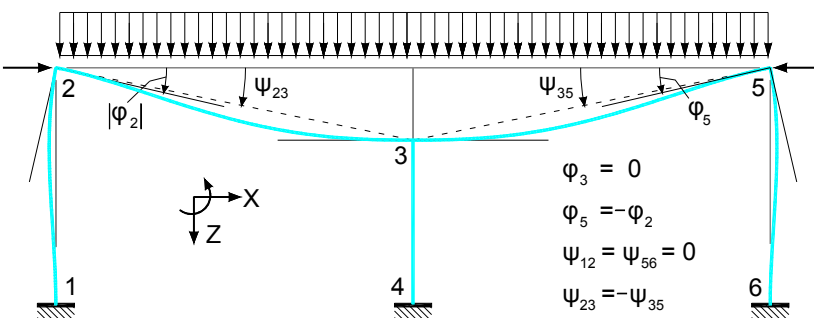
Σχήμα 16.10 Η παραμόρφωση (ποιοτικά) του ατενούς φορέα ($EA_{34} \rightarrow \infty$) για συμμετρική φόρτιση.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις των γεωμετρικών μεγεθών του φορέα (βλ. Σχ. 16.10), η μοναδιαία κατάσταση που απαιτείται για την επίλυση του ατενούς φορέα είναι:

$$“\Xi_1=1” \rightarrow (“\varphi_2=1” \text{ και } “\varphi_5=-1”)$$

Η διαδικασία επίλυσης είναι όμοια (τηρουμένων των αναλογιών) με αυτήν που περιγράφηκε αναλυτικά στην Άσκηση 15 (βλ. Σχ. 15.18 έως Σχ. 15.21). Επομένως, περιττεύει εδώ η αναλυτική της παρουσίαση. Είναι προφανές ότι, από τη διαδικασία επίλυσης θα πρέπει να προκύψουν τα διαγράμματα του σχήματος 16.5.

Στην περίπτωση που το στοιχείο 3-4 έχει πεπερασμένη δυστένεια, η παραμόρφωση του φορέα για συμμετρική φόρτιση δίνεται ποιοτικά στο σχήμα 16.11. Η υφιστάμενη δυνατότητα μετατόπισης του κόμβου 3 κατά τη διεύθυνση του κατακόρυφου άξονα Z οδηγεί στην ανάγκη εισαγωγής και ενός ακόμη αγνώστου γεωμετρικού μεγέθους Ξ_2 για την περιγραφή της παραμόρφωσης του φορέα: της γωνίας στροφής της χορδής του στοιχείου 2-3 ή 3-5. Εναλλακτικά, θα μπορούσε, βεβαίως, να εισαχθεί ως άγνωστο μέγεθος και η κατακόρυφη μετατόπιση του κόμβου 3.



Σχήμα 16.11 Η παραμόρφωση (ποιοτικά) του φορέα με $EA_{34}=\text{πεπερ.}$ για συμμετρική φόρτιση.

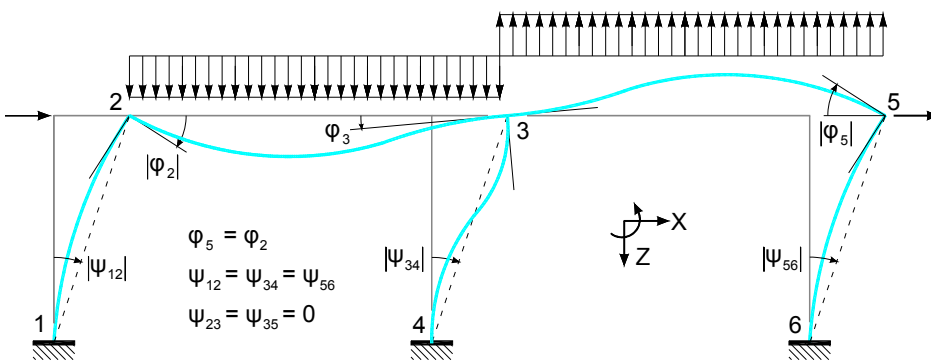
Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις των γεωμετρικών μεγεθών του φορέα (Σχ. 16.11), οι δύο μοναδιαίες ομαδικές καταστάσεις που απαιτούνται για την επίλυση είναι:

$$\begin{aligned} \text{"}\Xi_1=1\text{"} &\rightarrow \{\text{"}\varphi_2=1\text{" και }\text{"}\varphi_5=-1\text{"}\} \\ \text{"}\Xi_2=1\text{"} &\rightarrow \{\text{"}\psi_{23}=1\text{" και, αναγκαστικά, }\text{"}\psi_{35}=-1\text{"}\} \end{aligned}$$

Η επίλυση γίνεται με παρόμοιο τρόπο όπως στην Άσκηση 15. Από την επίλυση προκύπτουν τα διαγράμματα του σχήματος 16.4.

(β2) Αντισυμμετρική συνιστώσα της φόρτισης

Όταν ο φορέας φορτίζεται με αντισυμμετρική φόρτιση, η παραμόρφωσή του απαιτεί τον ίδιο αριθμό γεωμετρικών μεγεθών, είτε το στοιχείο 3-4 είναι ατενές, είτε όχι. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι, το στοιχείο 3-4 ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας, οπότε ο κόμβος 3 δεν έχει δυνατότητα κατακόρυφης μετακίνησης. Άρα, το μήκος του στοιχείου 3-4 δεν μεταβάλλεται, κατά την αντισυμμετρική φόρτιση του φορέα, και, επομένως, είναι αδιάφορο για την επίλυσή του, αν το στοιχείο 3-4 έχει άπειρη ή πεπερασμένη δυστένεια EA.



Σχήμα 16.12 Η παραμόρφωση του φορέα για αντισυμμετρική φόρτιση.

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις των γεωμετρικών μεγεθών του φορέα (Σχ. 16.12), οι τρεις μοναδιαίες καταστάσεις που απαιτούνται για την επίλυση είναι:

$$\begin{aligned} \text{"}\Xi_1=1\text{"} &\rightarrow \{\text{"}\varphi_2=1\text{" και }\text{"}\varphi_5=1\text{"}\} \\ \text{"}\Xi_2=1\text{"} &\rightarrow \{\text{"}\psi_{12}=1\text{" και, αναγκαστικά, }\text{"}\psi_{43}=1\text{" και }\text{"}\psi_{56}=1\text{"}\} \\ \text{"}\Xi_3=1\text{"} &\rightarrow \{\text{"}\varphi_3=1\text{"}\} \end{aligned}$$

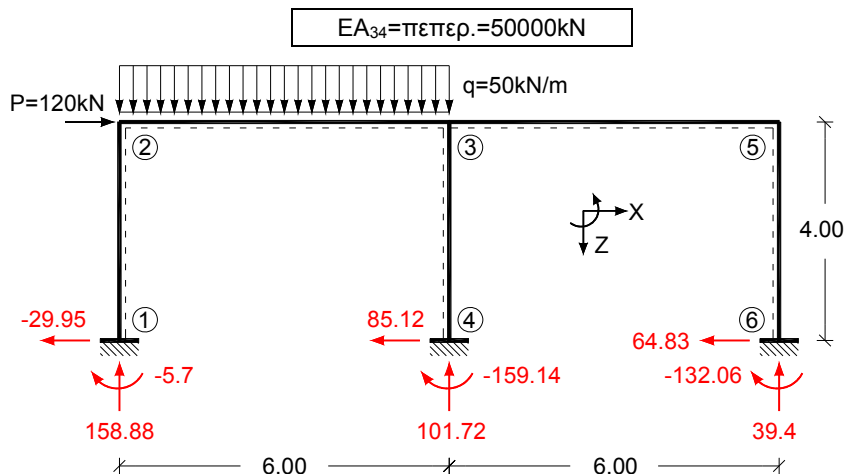
Από τους υπολογισμούς, που γίνονται κατά τα γνωστά, προκύπτουν τα διαγράμματα του σχήματος 16.7.

Τα τελικά διαγράμματα M, Q, N, που προκύπτουν από τη διαδικασία επίλυσης με την εισαγωγή των ομάδων υπεραριθμών μεγεθών, συμπίπτουν με τα διαγράμματα των σχημάτων 16.8-1, 16.8-2, 16.8-3 για την περίπτωση EA₃₄=πεπερ. και με τα διαγράμματα του σχήματος 16.9 για την περίπτωση EA₃₄→∞.

Έλεγχοι τελικών αποτελεσμάτων

Ακολούθως (βλ. Σχ. 16.13), διενεργούνται τρεις ισορροπιακοί έλεγχοι για ολόκληρο τον φορέα, αφενός για την περίπτωση EA₃₄=πεπερ.=50000kN και, αφετέρου για την περίπτωση ατενούς στοιχείου EA₃₄→∞. Οι χρησιμοποιούμενες τιμές των αντιδράσεων στήριξης και ροπών πάκτωσης προέρχονται από τα διαγράμματα των σχημάτων 16.8 (-1, -2, -3) και 16.9 αντιστοίχως.

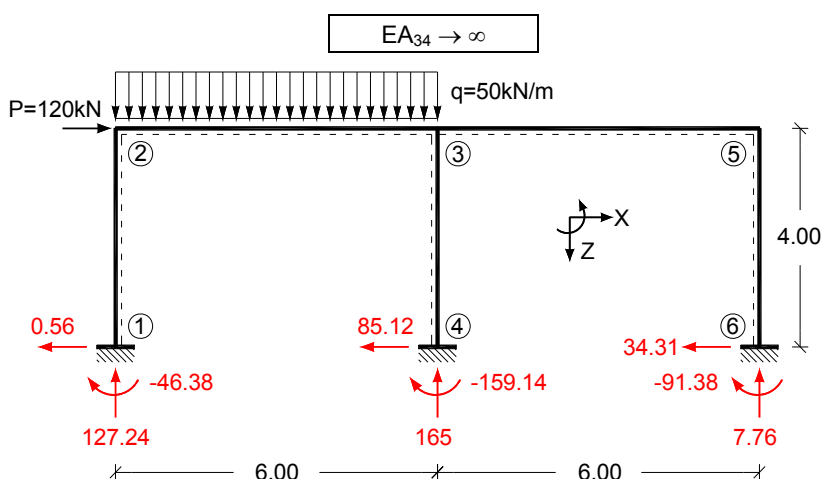
Οι τρεις ελεγχθείσες συνθήκες ισορροπίας ικανοποιούνται και στις δυο περιπτώσεις. Περαιτέρω ισορροπιακοί έλεγχοι, καθώς και οι έλεγχοι συμβιβαστού επαφίενται ως άσκηση στον αναγνώστη.



$$\sum F_x = 120 + 29.95 - 85.12 - 64.83 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = (50 \cdot 6) - 158.88 - 101.72 - 39.4 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_i = -120 \cdot 4 - 0.5 \cdot 50 \cdot 6^2 + 101.72 \cdot 6 + 39.4 \cdot 12 + 5.7 + 159.14 + 132.06 = 0.02 \approx 0 \text{ kNm}$$



$$\sum F_x = 120 - 0.56 - 85.12 - 34.31 = 0.01 \approx 0 \text{ kN}$$

$$\sum F_z = (50 \cdot 6) - 127.24 - 165 - 7.76 = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_i = -120 \cdot 4 - 0.5 \cdot 50 \cdot 6^2 + 165 \cdot 6 + 7.76 \cdot 12 + 46.38 + 159.14 + 91.38 = 0.02 \approx 0 \text{ kNm}$$

Σχήμα 16.13 Ισορροπιακοί έλεγχοι σε ολόκληρο τον φορέα.

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 7

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). Στατική των Κατασκευών, Τόμος I: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
- [2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). Στατική των Κατασκευών, Τόμος II: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Κεφάλαιο 8

Έλεγχοι ορθότητας της επίλυσης

Σύνοψη

Οι έλεγχοι των αποτελεσμάτων στατικών επιλύσεων, είτε οι επιλύσεις αυτές γίνονται με τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, είτε «με το χέρι», αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα της διαδικασίας επίλυσης. Οι έλεγχοι αυτοί είναι, κυρίως, έλεγχοι ισορροπίας για τα υπολογισθέντα εντασιακά μεγέθη και έλεγχοι συμβιβαστού για τα υπολογισθέντα παραμορφωσιακά μεγέθη. Οι δύο ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού, αφορούν στην εφαρμογή των δύο θεμελιωδών αρχών της Στατικής, δηλαδή της Αρχής των Δυνατών Έργων (ΑΔΕ) και της Αρχής των Συμπληρωματικών Δυνατών Έργων (ΑΣΔΕ), για τον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων μιας στατικής επίλυσης. Η ΑΔΕ χρησιμοποιείται για τους ελέγχους ισορροπίας, ενώ η ΑΣΔΕ για τους ελέγχους συμβιβαστού.

Προαπαιτούμενη γνώση

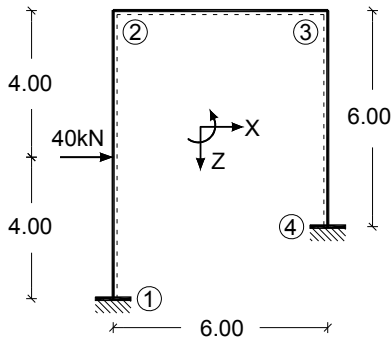
Απαραίτητη είναι η προηγούμενη εις βάθος κατανόηση της ΑΔΕ και της ΑΣΔΕ. Ειδικότερα, συνιστάται η μελέτη των παραγράφων 3.6 και 6.7 του [1], καθώς και της παραγράφου 3.2.6 του [2].

Άσκηση 17

Εκφώνηση

Για τον φορέα του σχήματος 17.0, δίνονται τα διαγράμματα ροπών και οι αντιδράσεις των στηρίξεων, όπως υπολογίστηκαν από δύο διαφορετικές επιλύσεις. Η Επίλυση 2 είναι αυτή που παρουσιάστηκε στην Άσκηση 9 για τη φόρτιση α, ενώ η Επίλυση 1 διενεργήθηκε από άλλον μελετητή. Ζητείται ο έλεγχος ορθότητας των αποτελεσμάτων των δύο αυτών επιλύσεων:

- (α) με εφαρμογή της αρχής δυνατών έργων (έλεγχος ισορροπίας) και
- (β) με εφαρμογή της αρχής συμπληρωματικών δυνατών έργων (έλεγχος συμβιβαστού των παραμορφώσεων).



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

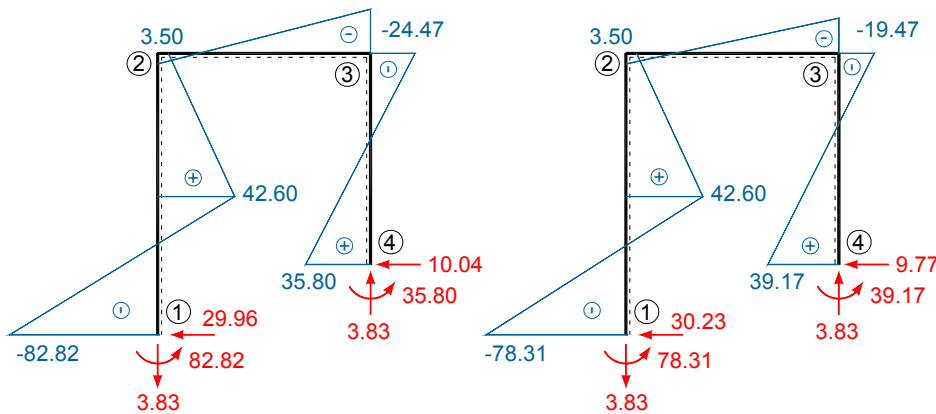
$EI_{12} = EI_{34} = 10^5 \text{ kNm}^2$

$EI_{23} = 6 \cdot 10^4 \text{ kNm}^2$

$EA \rightarrow GA_s \rightarrow \infty$

Επίλυση 1

Επίλυση 2



Σχήμα 17.0. Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση - Ροπές και αντιδράσεις.

Λύση

(α) Έλεγχος ισορροπίας με την αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ)

Σύμφωνα με την ΑΔΕ, το δυνατό έργο που παράγεται από ένα σύνολο *ισορροπουσών* δυνάμεων (=πραγματική κατάσταση έντασης) κατά μία δυνατή μετακίνηση (=νοητή κατάσταση μετακίνησης *συμβιβαστή* με τους συνδέσμους) του φορέα επί του οποίου δρα, είναι ίσο με το μηδέν και αντιστρόφως. Όπως γνωρίζουμε, η ΑΔΕ είναι απόλυτα ισοδύναμη με τις συνθήκες ισορροπίας και, επομένως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί, τόσο για τον υπολογισμό μεγεθών έντασης, όσο και για τον έλεγχο ορθότητας των τιμών τους, δηλαδή για τη διενέργεια ισορροπιακών ελέγχων των αποτελεσμάτων μιάς ανάλυσης.

Για τη διενέργεια ενός ελέγχου ισορροπίας με εφαρμογή της ΑΔΕ, ακολουθείται η εξής διαδικασία (Σε παρένθεση δίνονται οι επιλογές για την προκειμένη περίπτωση):

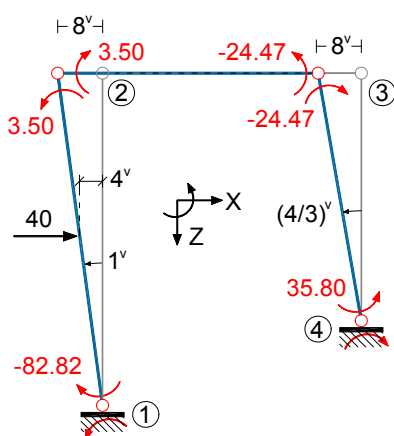
1. Με κατάλυση ικανού πλήθους δεσμικών ράβδων (εδώ: Με προσθήκη 4 αρθρώσεων) ο αρχικός φορέας μετατρέπεται σε κινηματική αλυσίδα. Έτσι, κατά την υποβολή του κινηματικού αυτού φορέα σε δυνατή μετακίνηση, δεν αναπτύσσονται παραμορφώσεις των δομικών του στοιχείων, αλλά μόνον μετατοπίσεις των κόμβων του. Με τον τρόπο αυτόν, κατά τον ακόλουθο υπολογισμό του δυνατού έργου παράγονται μόνο εξωτερικά δυνατά έργα. Τα εσωτερικά δυνατά έργα είναι μηδενικά (αφού δεν υπάρχουν

παραμορφώσεις), οπότε αποφεύγεται η ανάγκη ολοκληρώσεων κατά μήκος των μελών του φορέα, τις οποίες θα απαιτούσε ο υπολογισμός τους..

2. Προκειμένου να διατηρηθεί - παρά τη μετατροπή του φορέα σε κινηματική αλυσίδα - η προς έλεγχο δεδομένη εντασιακή κατάσταση, εισάγονται στις θέσεις των δεσμικών ράβδων που καταλύθηκαν (εδώ: στις θέσεις των αρθρώσεων που προστέθηκαν) τα υπάρχοντα εκεί εντασιακά μεγέθη (εδώ: Οι επιρράβδιες ροπές που λαμβάνονται από το διάγραμμα ροπών, του οποίου η ορθότητα ελέγχεται).
3. Ο κινηματικός αυτός φορέας (του οποίου, όμως, η εντασιακή κατάσταση ταυτίζεται με εκείνη του αρχικού φορέα) υποβάλλεται σε μία δυνατή μετακίνηση, η οποία εξ ορισμού είναι απειροστή και συμβιβαστή με τους συνδέσμους (δηλαδή τις στηρίξεις) του (κινηματικού) φορέα.
4. Καταγράφονται όλα τα δυνατά έργα που παράγονται κατά τη δυνατή μετακίνηση, δηλαδή τα εξωτερικά δυνατά έργα όλων των δυνάμεων που δρουν επί του κινηματικού φορέα. Εάν το διάγραμμα των ροπών, από το οποίο λαμβάνονται οι τιμές των καμπτικών ροπών, είναι ορθό, τότε το άθροισμα ΣW^v όλων των δυνατών έργων θα πρέπει να προκύψει ίσο με το μηδέν. Εάν το άθροισμα προκύψει διάφορο του μηδενός, τότε οι υπό έλεγχο ροπές περιέχουν λάθη.

Η παραπάνω διαδικασία θα εφαρμοστεί για τα διαγράμματα ροπών του σχήματος 17.0.

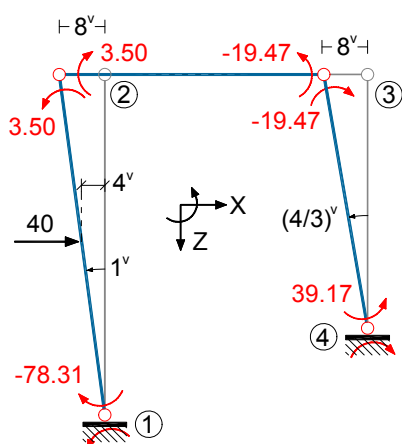
Επίλυση 1



$$\Sigma W^v = -(-82.82) \cdot 1^v + 3.50 \cdot 1^v - (-24.47) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^v + 35.80 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^v - 40 \cdot 4^v = 6.68 \neq 0$$

Συμπέρασμα: Το γεγονός ότι, τα χρησιμοποιηθέντα εντασιακά μεγέθη της Επίλυσης 1 δεν οδηγούν σε μηδενισμό των δυνατών έργων κατά την επιλεγείσα δυνατή μετακίνηση, σημαίνει ότι τα μεγέθη αυτά είναι λανθασμένα. Επομένως, η Επίλυση 1 είναι λανθασμένη.

Επίλυση 2



$$\Sigma W^v = -(-78.31) \cdot 1^v + 3.50 \cdot 1^v - (-19.47) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^v + 39.17 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^v - 40 \cdot 4^v = -0.003 \approx 0$$

Συμπέρασμα: Το γεγονός ότι, τα χρησιμοποιηθέντα εντασιακά μεγέθη της Επίλυσης 2 οδηγούν σε μηδενισμό των δυνατών έργων κατά την επιλεγείσα δυνατή μετακίνηση, σημαίνει ότι τα μεγέθη αυτά είναι σωστά.

Σχήμα 17.1 Έλεγχος των διαγραμμάτων ροπών των επιλύσεων 1 και 2 με την ΑΔΕ.

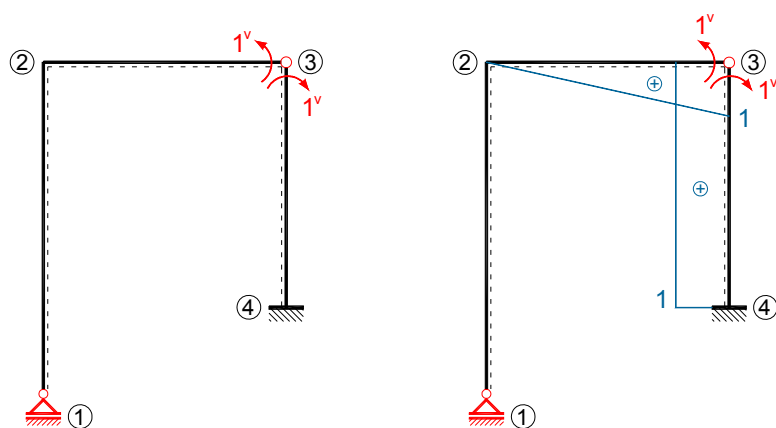
(β) Έλεγχος συμβιβαστού με την αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ΑΣΔΕ)

Σύμφωνα με την ΑΣΔΕ, το δυνατό έργο που παράγεται από ένα σύνολο νοητών ισορροπουσών δυνάμεων (=νοητή κατάσταση έντασης) κατά μία πραγματική μετακίνηση του φορέα (Σημ: Η πραγματική κατάσταση μετακίνησης ικανοποιεί εξ ορισμού τις συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων) είναι ίσο με το μηδέν και αντιστρόφως. Η ΑΣΔΕ είναι απόλυτα ισοδύναμη με τις συνθήκες συμβιβαστού (δηλαδή, γεωμετρικής συνέχειας) και, επομένως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί, τόσο για τον υπολογισμό μεγεθών μετακίνησης/ παραμόρφωσης, όσο και για τη διενέργεια ελέγχων συμβιβαστού των παραμορφώσεων/μετακινήσεων που προέκυψαν από την ανάλυση ενός φορέα.

Για τη διενέργεια ενός ελέγχου συμβιβαστού με εφαρμογή της ΑΣΔΕ ακολουθείται η εξής διαδικασία (Σε παρένθεση οι επιλογές για την προκειμένη περίπτωση):

1. Επιλέγεται το μέγεθος μετακίνησης, του οποίου η συμβατότητα πρέπει να ελεγχθεί. Συνήθως, επιλέγεται ένα μέγεθος, το οποίο, λόγω των συνδέσεων (εσωτερικών ή εξωτερικών) του δεδομένου φορέα, είναι ίσο με το μηδέν (εδώ: Η σχετική στροφή $\Delta\phi_3$ των άκρων των στοιχείων 2-3 και 3-4, η οποία, λόγω της μονολιθικής σύνδεσης των στοιχείων αυτών στον κόμβο 3, θα πρέπει να προκύψει ίση με το μηδέν). Μπορεί, βεβαίως, να επιλεγεί προς έλεγχο συμβιβαστού και ένα μέγεθος, του οποίου η μη μηδενική τιμή είναι ήδη γνωστή (π.χ. μία δεδομένη καταναγκασμένη βύθιση) ή έχει ήδη υπολογιστεί με άλλον τρόπο.
2. Ο υπολογισμός της προς έλεγχο επιλεγείσας μετακίνησης μπορεί να γίνει σύμφωνα με την πρόταση αναγωγής σε έναν παράγωγο ισοστατικό φορέα (εδώ: Κύλιση στον κόμβο 1 και άρθρωση στον κόμβο 3), ο οποίος φορτίζεται με μία νοητή μοναδιαία δύναμη εργικώς ανταποκρινόμενη προς την ελεγχόμενη μετακίνηση (Εδώ: Μοναδιαίο ζεύγος ροπών $(M3)v=1v$ στον κόμβο 3).
3. Ο, κατά αυτόν τον τρόπο, φορτισμένος παράγωγος ισοστατικός φορέας επιλύεται με τις συνθήκες ισορροπίας και προκύπτει, έτσι, μία ισορροπούσα νοητή κατάσταση έντασης.
4. Καταγράφονται όλα τα δυνατά συμπληρωματικά έργα (εξωτερικά και εσωτερικά), που παράγονται από τη νοητή κατάσταση έντασης κατά την πραγματική παραμόρφωση του φορέα. Υπενθυμίζεται ότι η πραγματική παραμόρφωση του φορέα υπολογίζεται από τη γνωστή (προς έλεγχο) πραγματική έντασή του με τη βοήθεια των σχέσεων, που προκύπτουν από το νόμο της γραμμικώς ελαστικής συμπεριφοράς του Hooke. Το άθροισμα ΣW^*v των έργων αυτών τίθεται ίσο με το μηδέν και από την εξίσωση αυτή υπολογίζεται το μέγεθος μετακίνησης, του οποίου η συμβατότητα πρέπει να ελεγχθεί.
5. Αν η τιμή του μεγέθους μετακίνησης, που υπολογίστηκε κατά το προηγούμενο βήμα, είναι ίση με την εξ αρχής γνωστή τιμή (μηδενική ή δεδομένη) του μεγέθους αυτού, τότε τα χρησιμοποιηθέντα αποτελέσματα (εδώ: Το δεδομένο διάγραμμα ροπών) ικανοποιούν τις συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Σε αντίθετη περίπτωση, η δεδομένη εντασιακή κατάσταση δεν ικανοποιεί τις συνθήκες συμβιβαστού και, επομένως, είναι λανθασμένη.

Η παραπάνω διαδικασία θα εφαρμοστεί για τα διαγράμματα ροπών του σχήματος 17.0. Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, ως παράγωγος φορέας επιλέγεται το ισοστατικό πλαίσιο του σχήματος 17.2 με άρθρωση-κύλιση στον κόμβο 1 και άρθρωση στον κόμβο 3.



Σχήμα 17.2 Μοναδιαία νοητή (βοηθητική) φόρτιση και ένταση του παράγωγου ισοστατικού φορέα.

Ακολούθως, καταγράφονται τα συμπληρωματικά δυνατά έργα βάσει των δεδομένων αποτελεσμάτων των δύο επιλύσεων 1 και 2, και ελέγχεται για κάθε περίπτωση, αν το άθροισμά τους είναι ίσο με το μηδέν.

β1) Έλεγχος των αποτελεσμάτων της Επίλυσης 1

$$\sum W^{*v} = \sum W_e^{*v} + \sum W_i^{*v} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum W^{*v} = \Delta\phi_3 \cdot 1^v - \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^{L_{23}} [M^v(x) \cdot M(x)] dx + \int_0^{L_{34}} [M^v(x) \cdot M(x)] dx \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta\phi_3 - \frac{1}{6 \cdot 10^4} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 1^v \cdot (3.5 - 2 \cdot 24.47) \right] - \frac{1}{10^5} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1^v \cdot (-24.47 + 35.8) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_3 = \frac{(-45.44)}{6 \cdot 10^4} + \frac{33.99}{10^5} \Rightarrow \Delta\phi_3 = (7.573 - 3.399) \cdot 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_3 = 4.17 \cdot 10^{-4} \neq 0$$

Συμπέρασμα: Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η σχετική στροφή $\Delta\phi_3$ στον κόμβο 3 είναι διάφορη του μηδενός. Αυτό σημαίνει, ότι τα χρησιμοποιηθέντα εντασιακά μεγέθη της Επίλυσης 1 δεν ικανοποιούν τις συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων, και, επομένως, τα μεγέθη αυτά είναι λανθασμένα. Άρα, η Επίλυση 1 είναι λανθασμένη.

β2) Έλεγχος των αποτελεσμάτων της Επίλυσης 2

$$\sum W^{*v} = \sum W_e^{*v} + \sum W_i^{*v} = 0 \Rightarrow$$

$$\sum W^{*v} = \Delta\phi_3 \cdot 1^v - \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^{L_{23}} [M^v(x) \cdot M(x)] dx + \int_0^{L_{34}} [M^v(x) \cdot M(x)] dx \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta\phi_3 - \frac{1}{6 \cdot 10^4} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 1^v \cdot (3.5 - 2 \cdot 19.47) \right] - \frac{1}{10^5} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1^v \cdot (-19.47 + 39.17) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_3 = \frac{(-35.44)}{6 \cdot 10^4} + \frac{59.1}{10^5} \Rightarrow \Delta\phi_3 = (-5.907 + 5.910) \cdot 10^{-4}$$

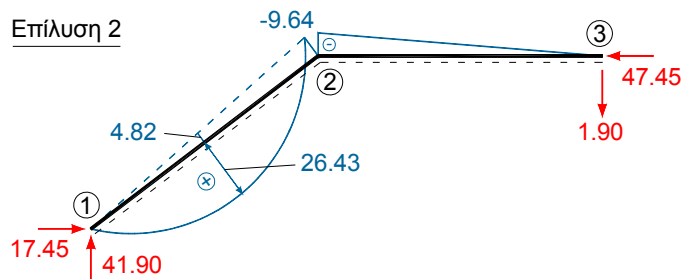
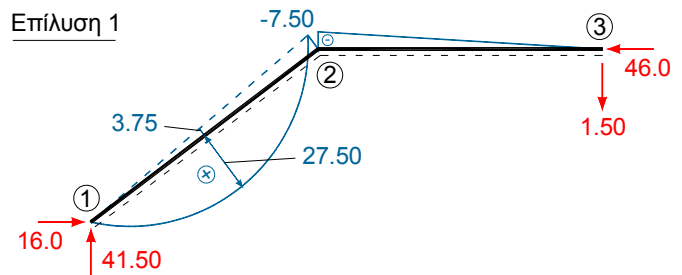
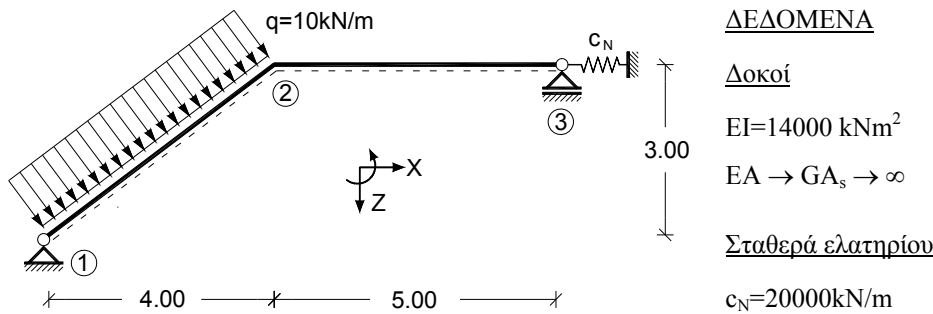
$$\Rightarrow \Delta\phi_3 = 0.003 \cdot 10^{-4} \cong 0$$

Συμπέρασμα: Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η σχετική στροφή $\Delta\phi_3$ στον κόμβο 3 είναι ίση με το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι, τα χρησιμοποιηθέντα εντασιακά μεγέθη της Επίλυσης 2 ικανοποιούν τη συγκεκριμένη συνθήκη συμβιβαστού, και, επομένως, τα μεγέθη αυτά είναι σωστά.

Άσκηση 18

Εκφώνηση

Για τον φορέα του σχήματος 18.0, δίνονται τα διαγράμματα ροπών και οι αντιδράσεις των στηρίξεων, όπως υπολογίστηκαν από δύο διαφορετικές επιλύσεις. Να διενεργηθούν έλεγχοι ισορροπίας (με την ΑΔΕ) και έλεγχοι συμβιβαστού (με την ΑΣΔΕ), προκειμένου να διαπιστωθεί η ορθότητα ή μη των αποτελεσμάτων αυτών.



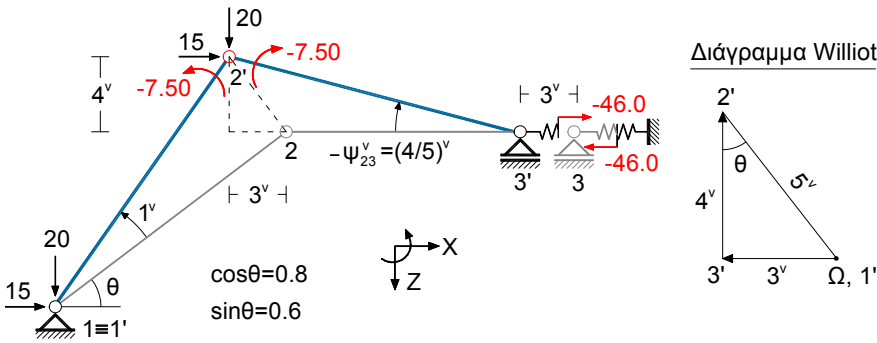
Σχήμα 18.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση - Ροπές και αντιδράσεις.

Λύση

(α) Έλεγχος ισορροπίας με την ΑΔΕ

Για τη διενέργεια ενός ελέγχου ισορροπίας με εφαρμογή της ΑΔΕ, ακολουθείται η διαδικασία που περιγράφηκε αναλυτικά στην άσκηση 17. Ως δυνατή μετακίνηση επιλέγεται εδώ η θετική μοναδιαία στροφή της χορδής 1-2.

(α1) Έλεγχος των αποτελεσμάτων της Επίλυσης 1

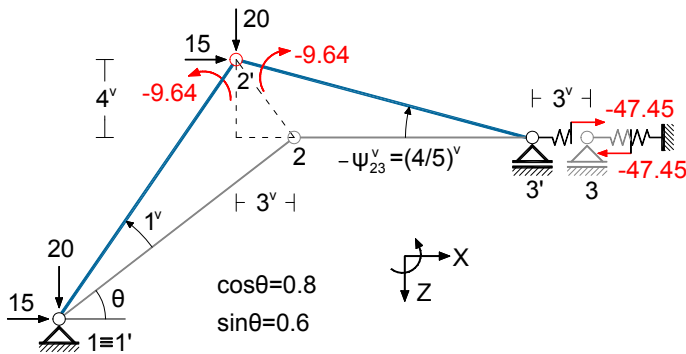


$$\sum W^v = (-7.5) \cdot 1^v + (-7.5) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^v + (-46.0) \cdot (-3)^v + 20 \cdot (-4)^v + 15 \cdot (-3)^v = -0.5 \neq 0$$

Σχήμα 18.1-1 Έλεγχος ισορροπίας των αποτελεσμάτων της Επίλυσης 1 με την ΑΔΕ.

Συμπέρασμα: Το γεγονός ότι, τα χρησιμοποιηθέντα εντασιακά μεγέθη της Επίλυσης 1 δεν οδηγούν σε μηδενισμό των δυνατών έργων κατά την επιλεγείσα δυνατή μετακίνηση, σημαίνει ότι τα μεγέθη αυτά είναι λανθασμένα. Επομένως, η Επίλυση 1 είναι λανθασμένη.

(α2) Έλεγχος των αποτελεσμάτων της Επίλυσης 2



$$\sum W^v = (-9.64) \cdot 1^v + (-9.64) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^v + (-47.45) \cdot (-3)^v + 20 \cdot (-4)^v + 15 \cdot (-3)^v = -0.002 \approx 0$$

Σχήμα 18.1-2 Έλεγχος ισορροπίας των αποτελεσμάτων της Επίλυσης 2 με την ΑΔΕ.

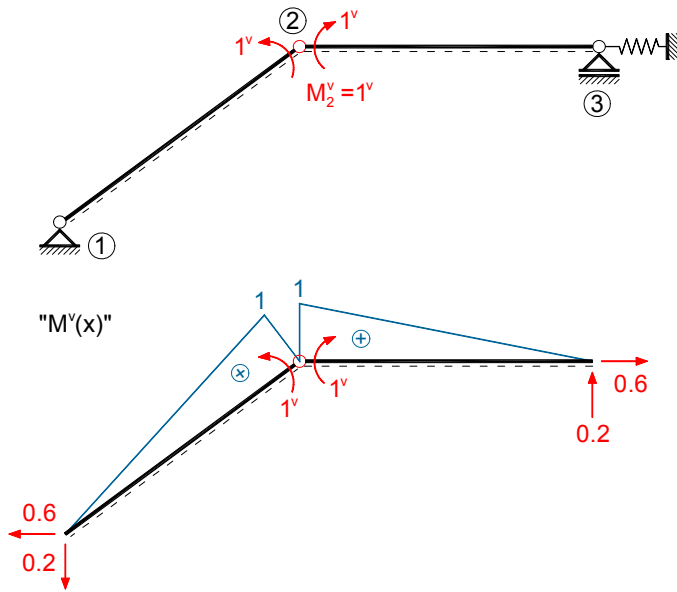
Συμπέρασμα: Το γεγονός ότι, τα χρησιμοποιηθέντα εντασιακά μεγέθη της Επίλυσης 2 οδηγούν σε μηδενισμό των δυνατών έργων κατά την επιλεγείσα δυνατή μετακίνηση, σημαίνει ότι τα μεγέθη αυτά είναι σωστά.

Παρατηρήσεις:

1. Η δυνατή μετακίνηση επιβάλλεται στον χαλαρό (κινηματικό) φορέα, που προκύπτει από τον δεδομένο φορέα με την εισαγωγή μιας άρθρωσης στον κόμβο 2 και με την τομή του ελατηρίου στον κόμβο 3. Προκειμένου να διατηρηθεί η προς έλεγχο εντασιακή κατάσταση, στη μεν άρθρωση προσάγεται η *επιρράβδια* ροπή -7.50 ή -9.64 , στις δε όχθες του τετμημένου ελατηρίου η ελατηριακή δύναμη -46.0 ή -47.45 , αντιστοίχως, που αμφότερες προέκυψαν από την Επίλυση 1.
2. Οι εξωτερικές μοναχικές δυνάμεις, που τοποθετήθηκαν στους κόμβους 1 και 2, προκύπτουν από την ανάλυση της δεδομένης φόρτισης του στοιχείου 1-2 σε δύο συνιστώσες κατά τους άξονες X και Z, και την ισοκατανομή τους στους κόμβους αυτούς.
3. Ο υπολογισμός της δυνατής στροφής ψ_{23}^v της χορδής 2-3 γίνεται, διαιρώντας τη μετατόπιση του κόμβου 2 κατά τον άξονα Z ($w_2 = -4^v$) με το μήκος του στοιχείου 2-3 ($L_{23} = 5\text{m}$). Το πρόσημο της γωνίας αυτής είναι αρνητικό, διότι έχει φορά αντίθετη της συμβατικά θετικής φοράς, η οποία είναι αριστερόστροφη. Το βελάκι που συμβολίζει τη γωνία στροφής της δοκού 2-3 στο σχήμα 18.1-1 είναι δεξιόστροφο και επομένως αντιστοιχεί στην $-\psi_{23}^v$.

(β) Έλεγχος συμβιβαστού με την ΑΣΔΕ

Για τη διενέργεια ενός ελέγχου συμβιβαστού των παραμορφώσεων ή μετακινήσεων με εφαρμογή της ΑΣΔΕ, ακολουθείται η διαδικασία που παρουσιάστηκε αναλυτικά στην Άσκηση 17. Στην περίπτωση μας επιλέγεται ως μέγεθος προς έλεγχο η σχετική στροφή $\Delta\phi_2$ μεταξύ των κοινών άκρων των στοιχείων 1-2 και 2-3, η οποία, λόγω της μονολιθικής σύνδεσης των στοιχείων αυτών στον κόμβο 2, θα πρέπει να προκύψει ίση με το μηδέν. Ο υπολογισμός της μπορεί να γίνει σύμφωνα με την πρόταση αναγωγής σε έναν παράγωγο ισοστατικό φορέα. Αυτός προκύπτει, π.χ., με εισαγωγή στον κόμβο 2 μιας άρθρωσης. Το εργικώς ανταποκρινόμενο νοητό εντασιακό μέγεθος, που πρέπει χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της $\Delta\phi_2$, είναι το μοναδιαίο ζεύγος ροπών $M_2^v=1^v$ στον κόμβο 2 (Σχ. 18.2).



Σχήμα 18.2 Μοναδιαία νοητή (βοηθητική) φόρτιση και ένταση του παράγωγου ισοστατικού φορέα.

Σύμφωνα με την ΑΣΔΕ, το δυνατό έργο που παράγει η νοητή εντασιακή κατάσταση λόγω $M_2^v=1^v$ επί των παραμορφώσεων και μετακινήσεων της πραγματικής κατάστασης πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν. Διαφορετικά, η δεδομένη κατάσταση δεν ικανοποιεί τις συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Ακολουθώντας, καταστρώνονται τα συμπληρωματικά δυνατά έργα βάσει των δεδομένων αποτελεσμάτων των δύο επιλύσεων 1 και 2, και ελέγχεται για κάθε περίπτωση αν το άθροισμά τους συνεπάγεται $\Delta\phi_2=0$.

(β1) Έλεγχος των αποτελεσμάτων της Επίλυσης 1

$$\sum W^{*v} = \sum W_e^{*v} + \sum W_i^{*v} = 0$$

$$\sum W^{*v} = \Delta\phi_2 \cdot 1^v - \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^{L_{12}} [M^v(x) \cdot M(x)] dx + \int_0^{L_{23}} [M^v(x) \cdot M(x)] dx \right] - A_{x3}^v \cdot \left(\frac{A_{x3}}{c_N} \right) = 0$$

$$\Delta\phi_2 - \frac{1}{1.4 \cdot 10^4} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 1^v \cdot (2 \cdot 27.5 - 7.5) + \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 1^v \cdot (-7.5) \right] - 0.6 \cdot \left(\frac{-46}{2 \cdot 10^4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_2 = \frac{(39.583 - 12.5)}{1.4 \cdot 10^4} - \frac{27.60}{2 \cdot 10^4}$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_2 = (19.345 - 13.8) \cdot 10^{-4} = 5.54 \cdot 10^{-4} \neq 0$$

Συμπέρασμα: Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η σχετική στροφή $\Delta\phi_2$ στον κόμβο 2 είναι διάφορη του μηδενός. Αυτό σημαίνει ότι, τα χρησιμοποιηθέντα εντασιακά μεγέθη της Επίλυσης 1 δεν ικανοποιούν τις

συνθήκες συμβιβαστού των παραμορφώσεων, και, επομένως, τα μεγέθη αυτά είναι λανθασμένα. Άρα, η Επίλυση 1 είναι λανθασμένη.

(β2) Έλεγχος των αποτελεσμάτων της Επίλυσης 2

$$\sum W^{*v} = \sum W_e^{*v} + \sum W_i^{*v} = 0$$

$$\sum W^{*v} = \Delta\phi_2 \cdot 1' - \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^{L_{12}} [M^v(x) \cdot M(x)] dx + \int_0^{L_{23}} [M^v(x) \cdot M(x)] dx \right] - A_{x3}^v \cdot \left(\frac{A_{x3}}{C_N} \right) = 0$$

$$\Delta\phi_2 - \frac{1}{1.4 \cdot 10^4} \cdot \left[\frac{1}{6} \cdot 5 \cdot 1' \cdot (2 \cdot 26.43 - 9.64) + \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 1' \cdot (-9.64) \right] - 0.6 \cdot \left(\frac{-47.45}{2 \cdot 10^4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_2 = \frac{(36.0167 - 16.067)}{1.4 \cdot 10^4} - \frac{28.47}{2 \cdot 10^4}$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_2 = (14.250 - 14.235) \cdot 10^{-4} = 0.015 \cdot 10^{-4} \approx 0$$

Συμπέρασμα: Από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι η σχετική στροφή $\Delta\phi_2$ στον κόμβο 2 είναι ίση με το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι, τα χρησιμοποιηθέντα εντασιακά μεγέθη της Επίλυσης 2 ικανοποιούν τη συγκεκριμένη συνθήκη συμβιβαστού, και, επομένως, τα μεγέθη αυτά είναι σωστά.

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 8

[1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). Στατική των Κατασκευών, Τόμος I: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
 [2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). Στατική των Κατασκευών, Τόμος II: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Κεφάλαιο 9

Χωρικοί φορείς

Σύνοψη

Η άσκηση 19, που περιέχεται στο κεφάλαιο αυτό, αφορά στον υπολογισμό ενός απλού χωρικού φορέα με τη μέθοδο μετακινήσεων (ΜΜ). Στόχος της είναι να δείξει ότι η διαδικασία επίλυσης ακολουθεί ακριβώς τα ίδια βήματα όπως και στους επίπεδους φορείς. Αυτός, άλλωστε, είναι και ο λόγος που η «χειρωνακτική» εφαρμογή της ΜΜ περιορίζεται, συνήθως, σε επίπεδους φορείς, οι οποίοι κατά κανόνα έχουν πολύ μικρότερο πλήθος βαθμών ελευθερίας. Με γνώμονα την αποφυγή υπερβολικά πολλών υπολογισμών, που δεν θα συνεισέφεραν κάτι παραπάνω στην κατανόηση, επιλέχθηκε εδώ προς επίλυση ένας χωρικός φορέας που, υπό τη δεδομένη φόρτιση, εμφανίζει τρεις μόνον άγνωστες μετακινήσεις.

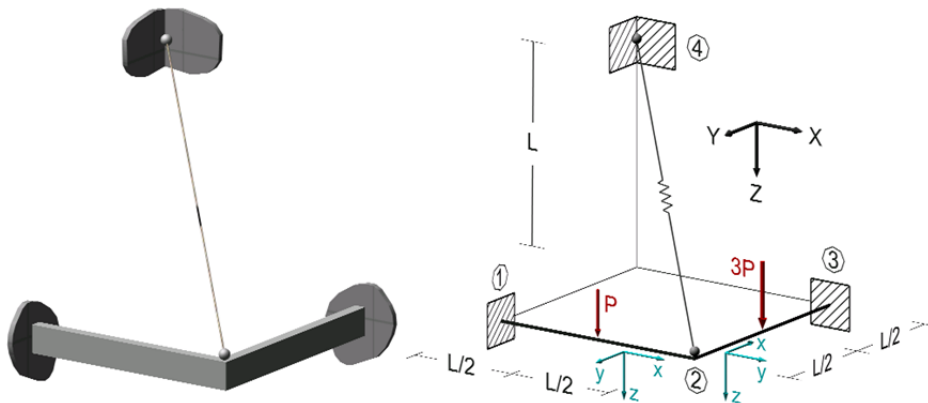
Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων και οπωσδήποτε η μελέτη των ασκήσεων των προηγούμενων κεφαλαίων 1 έως 6. Σε κάθε περίπτωση, απαιτείται καλή γνώση της Στατικής των ισοστατικών χωρικών φορέων. Ειδικότερα, συνιστάται η μελέτη των παραγράφων 3.2.6B και 7.5.6 του [1].

Άσκηση 19

Εκφώνηση

Ο χωρικός φορέας του σχήματος 19.0 να επιλυθεί με τη ΜΜ. Να υπολογιστεί η αξονική δύναμη της ράβδου (2-4) και να σχεδιαστούν τα διαγράμματα ροπών κάμψης των δοκών (1-2) και (2-3) σε κατακόρυφο και οριζόντιο επίπεδο, καθώς και των ροπών στρέψης τους.



ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Γεωμετρία: $L=4.00\text{m}$

Φόρτιση: $P=200\text{kN}$

Ράβδος (2-4):

Κυκλική διατομή $D=0.03\text{m}$
 $A=0.00070686\text{m}^2$
 $E_s=2.0 \cdot 10^8\text{kN/m}^2$

Δοκοί (1-2) και (2-3):

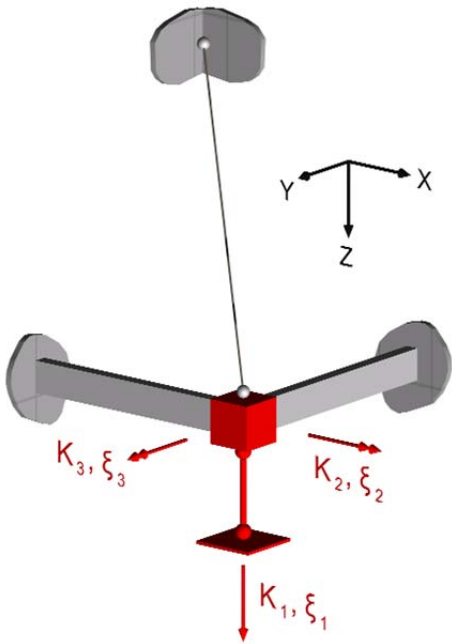
Ορθογωνική διατομή (d_y/d_z) 20/50
 $I_{xx}=9.98 \cdot 10^{-4}\text{m}^4$, $I_{yy}=2.0833 \cdot 10^{-3}\text{m}^4$
 $I_{zz}=3.33 \cdot 10^{-3}\text{m}^4$
 Υλικό: $E_b=2.9 \cdot 10^7\text{kN/m}^2$, $\nu_b=0.2$
 $G_b=E_b/[2(1+\nu)]$
 Παραδοχές: $E_b A \rightarrow G_b A_s \rightarrow \infty$

Σχήμα 19.0 Δεδομένος φορέας - Γεωμετρία, υλικό, φόρτιση.

Λύση

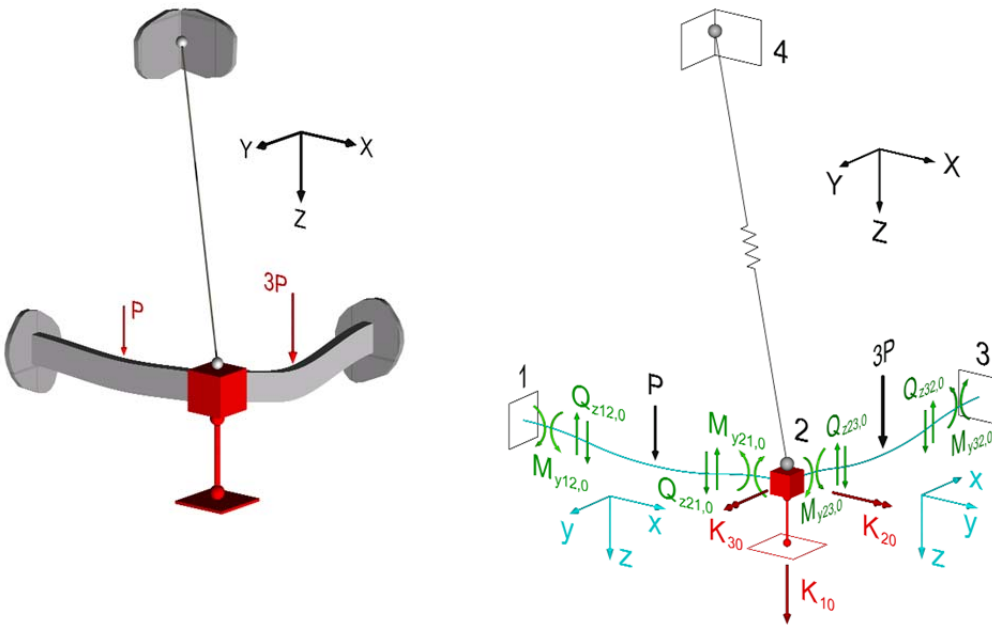
Βήμα 1. Καθορισμός του ΓΚΣ

Ο φορέας του σχήματος 19.0 είναι ένας χωρικός φορέας με έναν ελεύθερο κόμβο (τον κόμβο 2). Επομένως, οι βαθμοί ελευθερίας του, στην περίπτωση κατά την οποία λαμβάνεται υπόψη η πεπερασμένη δυστένεια των δύο δοκών 1-2 και 2-3, θα ήταν έξι, όσες, δηλαδή, είναι και οι ελευθερίες κίνησης ενός κόμβου στο χώρο. Επειδή, όμως, εδώ οι δοκοί θεωρούνται ατελείς, ο κόμβος 2 δεν έχει δυνατότητες μετατόπισης κατά τη διεύθυνση των αξόνων X και Y του καθολικού συστήματος αναφοράς. Επιπλέον, η στροφή φ_z του κόμβου 2 περί τον κατακόρυφο άξονα Z είναι μηδενική, διότι ο φορέας δεν φορτίζεται από δυνάμεις εντός του επίπεδου X-Y αυτού ή από ροπές με διανύσματα ροπών παράλληλα με τον άξονα Z. Επομένως, οι βαθμοί ελευθερίας του φορέα είναι 3 ($u_z, \varphi_x, \varphi_y$) και το ΓΚΣ είναι αυτό που δίνεται στο σχήμα 19.1. Η τρικινητή πάκτωση του κόμβου 2 συμβολίζεται με τον κόκκινο χρώματος κύβο, ενώ η κατακόρυφη παγίωσή του με την κατακόρυφη κόκκινη δεσμική ράβδο.



Σχήμα 19.1 Το ΓΚΣ του φορέα του σχήματος 19.0.

Βήμα 2. Υπολογισμός των απαιτούμενων μεγεθών έντασης της κατάστασης "0"



(Για τις τιμές των ροπών βλ. Πίνακα 1 του Παραρτήματος)

$$M_{y12,0} = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{L_{12}^2} = \frac{P \cdot (L_{12}/2) \cdot (L_{12}/2)^2}{L_{12}^2} = 100 \text{ kNm}$$

$$Q_{z12,0} = -\frac{P \cdot b^2}{L_{12}^3} \cdot (L_{12} + 2 \cdot a) = -100 \text{ kN}$$

$$M_{y23,0} = \frac{(3 \cdot P) \cdot a \cdot b^2}{L_{23}^2} = \frac{(3 \cdot P) \cdot (L_{23}/2) \cdot (L_{23}/2)^2}{L_{23}^2} = 300 \text{ kNm}$$

$$Q_{z23,0} = -\frac{(3 \cdot P) \cdot b^2}{L_{23}^3} \cdot (L_{23} + 2 \cdot a) = -300 \text{ kN}$$

$$M_{y21,0} = -\frac{P \cdot a^2 \cdot b}{L_{12}^2} = -100 \text{ kNm}$$

$$Q_{z21,0} = -\frac{P \cdot a^2}{L_{12}^3} \cdot (L_{12} + 2 \cdot b) = -100 \text{ kN}$$

$$M_{y32,0} = -\frac{(3 \cdot P) \cdot a^2 \cdot b}{L_{23}^2} = -300 \text{ kNm}$$

$$Q_{z32,0} = -\frac{(3 \cdot P) \cdot a^2}{L_{23}^3} \cdot (L_{23} + 2 \cdot b) = -300 \text{ kN}$$

$$M_{x12,0} = M_{x21,0} = 0$$

$$M_{x23,0} = M_{x32,0} = 0$$

$$N_{24,0} = -N_{42,0} = 0$$

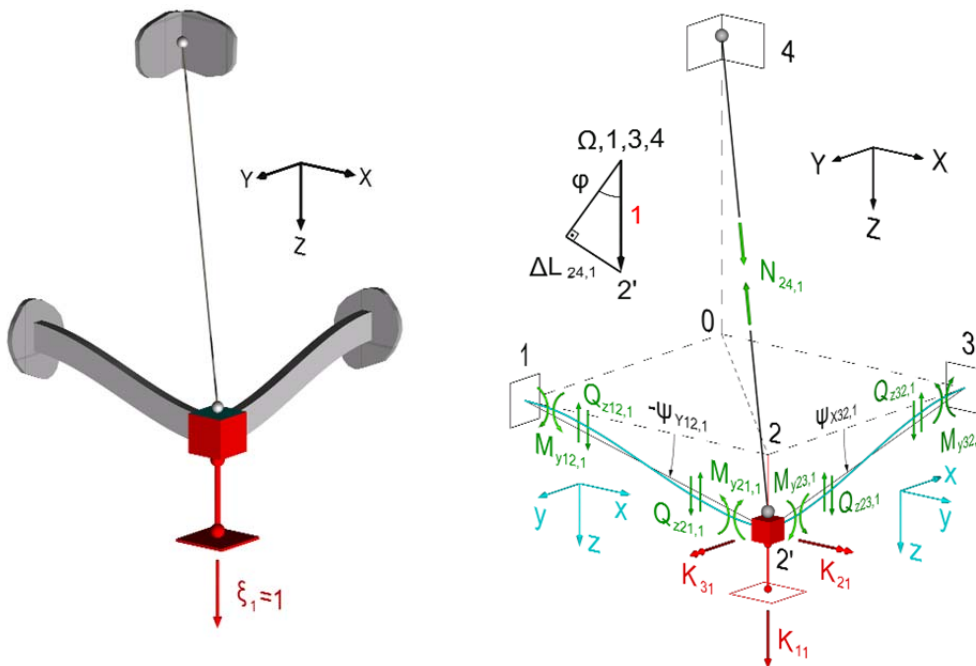
Σχήμα 19.2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0".

Σημείωση:

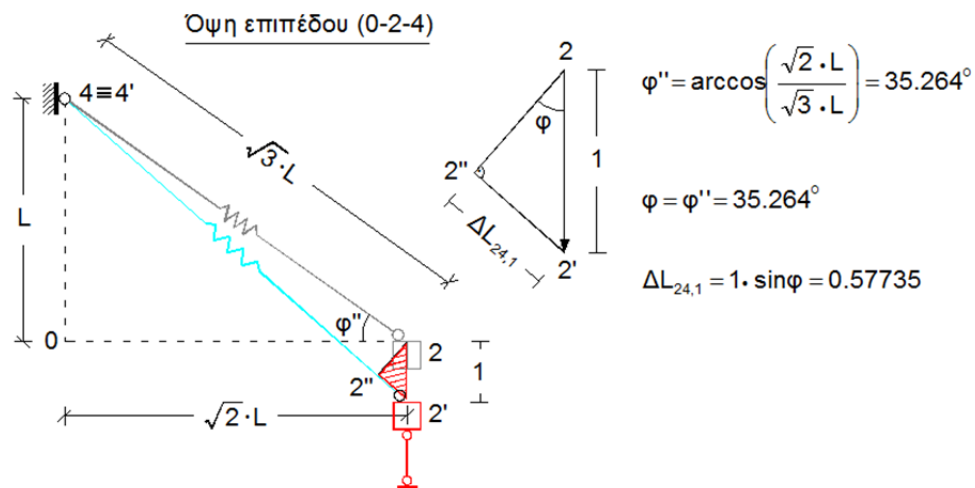
Στα σχήματα της κατάστασης "0", όπως και στα σχήματα των μοναδιαίων καταστάσεων που θα ακολουθήσουν, παρουσιάζονται εκείνα μόνον τα μεγέθη έντασης, τα οποία χρειάζονται για τον υπολογισμό των αντιδράσεων, που αναπτύσσονται στις τρεις προστεθείσες δεσμικές ράβδους στον κόμβο 2.

Βήμα 3. Υπολογισμός μεγεθών έντασης / μετακίνησης των καταστάσεων "ξ_i=1" (i=1,2,3)

- Κατάσταση "ξ₁=1" (Σχ. 19.3)



$$\Psi_{y12,1} = \Psi_{y12,1} = \frac{v_{z1} - v_{z2}}{L_{12}} = \frac{0 - 1}{4} = -0.25 \quad \Psi_{y23,1} = \Psi_{x23,1} = \frac{v_{z2} - v_{z3}}{L_{23}} = \frac{1 - 0}{4} = 0.25$$



Σχήμα 19.3 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "ξ₁=1".

Οι ροπές στην κατάσταση "ξ₁=1" υπολογίζονται βάσει των τύπων του Πίνακα 1 για την αμφίπακτη δοκό. Από τις ροπές υπολογίζονται οι τέμνουσες κατά τα γνωστά:

$$M_{y_{12,1}} = -6 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}} \right) \cdot \psi_{y_{12,1}} = -6 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot (-0.25) = 22656.25 \text{ kNm} \quad M_{y_{21,1}} = M_{y_{12,1}}$$

$$Q_{z_{12,1}} = 12 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}^2} \right) \cdot \psi_{y_{12,1}} = -11328.125 \text{ kN} \quad Q_{z_{21,1}} = -Q_{z_{12,1}}$$

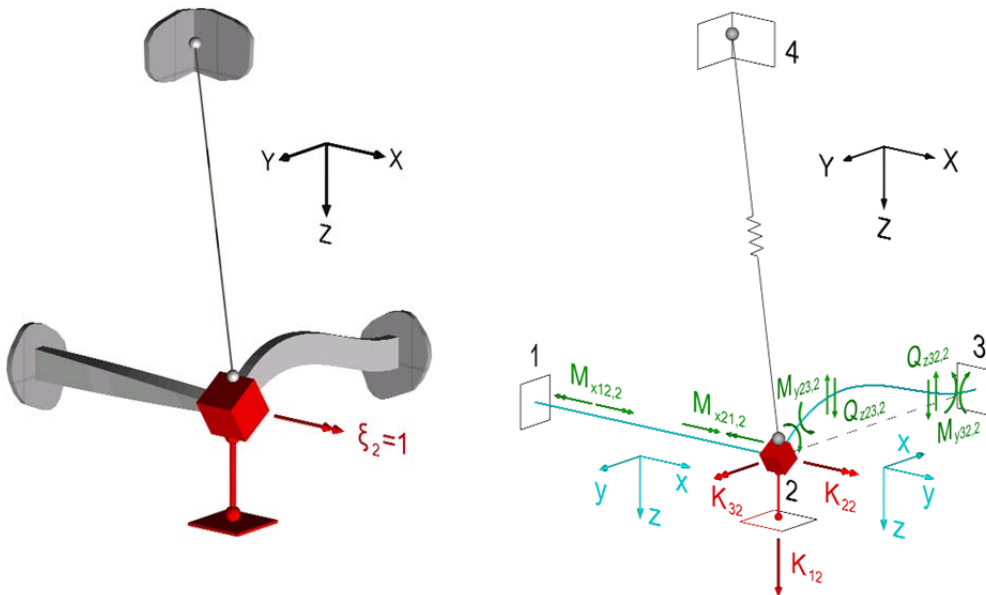
$$M_{y_{23,1}} = -6 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}} \right) \cdot \psi_{y_{23,1}} = -6 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 0.25 = -22656.25 \text{ kNm} \quad M_{y_{32,1}} = M_{y_{23,1}}$$

$$Q_{z_{23,1}} = 12 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}^2} \right) \cdot \psi_{y_{23,1}} = 11328.125 \text{ kN} \quad Q_{z_{32,1}} = -Q_{z_{23,1}}$$

$$M_{x_{12,1}} = M_{x_{21,1}} = 0 \quad M_{x_{23,1}} = M_{x_{32,1}} = 0$$

$$N_{24,1} = -N_{42,1} = E_s A_{24} \cdot \left(\frac{\Delta L_{24,1}}{L_{24}} \right) = 2.0 \cdot 10^8 \cdot 0.00070686 \cdot \left(\frac{0.57735}{6.9282} \right) = 11780.97 \text{ kN}$$

• Κατάσταση " $\xi_2=1$ " (Σχ. 19.4)



$$\varphi_{x_{21}} = \varphi_{y_{23}} = \xi_2 = 1$$

Ροπές στρέψης :

$$M_{x_{12,2}} = \left(-\frac{G_b \cdot I_{xx12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_{x_{21}} = \left(-\frac{1.2083 \cdot 10^7 \cdot 9.981 \cdot 10^{-4}}{4} \right) \cdot 1 = -3015.094 \text{ kNm} \quad M_{x_{21,2}} = -M_{x_{12,2}} \quad M_{x_{23,2}} = M_{x_{32,2}} = 0$$

Ροπές κάμψης, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις :

$$M_{y_{12,2}} = M_{y_{21,2}} = 0 \quad Q_{z_{12,2}} = Q_{z_{21,2}} = 0$$

$$M_{y_{23,2}} = 4 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_{y_{23}} = 4 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 1 = 60416.667 \text{ kNm}$$

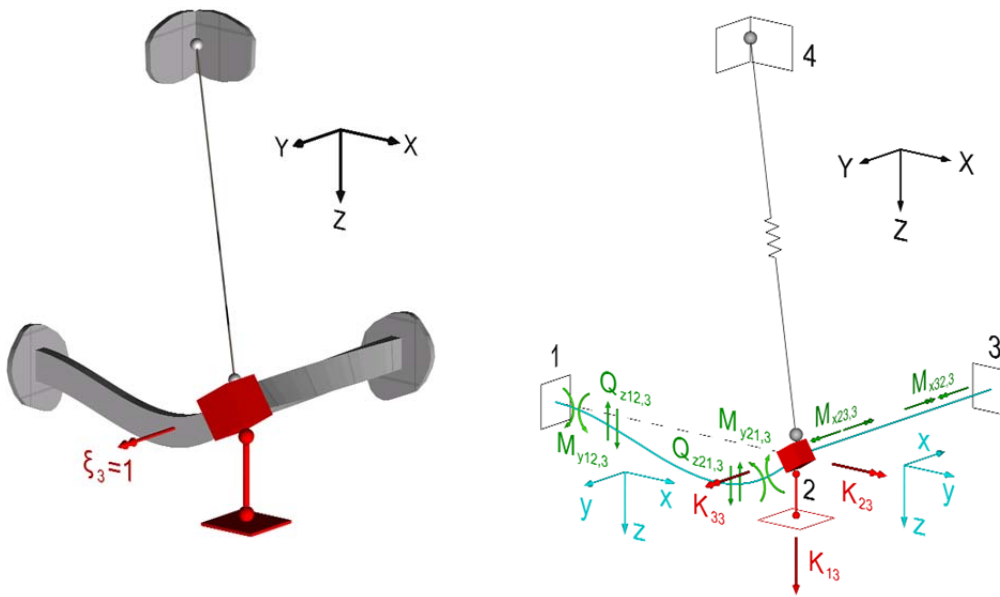
$$M_{y_{32,2}} = 2 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_{y_{23}} = 2 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 1 = 30208.333 \text{ kNm}$$

$$Q_{z_{23,2}} = -6 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy23}}{L_{23}^2} \right) \cdot \varphi_{y_{23}} = -22656.25 \text{ kN} \quad Q_{z_{32,2}} = -Q_{z_{23,2}}$$

$$N_{24,2} = -N_{42,2} = 0$$

Σχήμα 19.4 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_2=1$ ".

- Κατάσταση " $\xi_3=1$ " (Σχ. 19.5)



$$\varphi_{y12} = -\varphi_{x23} = \xi_3 = 1$$

Ροπές κάμψης, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις :

$$M_{y12,3} = 2 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_{y12} = 2 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 1 = 30208.333 \text{ kNm}$$

$$M_{y21,3} = 4 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_{y12} = 4 \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^7 \cdot 2.083 \cdot 10^{-3}}{4} \right) \cdot 1 = 60416.667 \text{ kNm}$$

$$Q_{z12,3} = -6 \cdot \left(\frac{E_b I_{yy12}}{L_{12}^2} \right) \cdot \varphi_{y12} = -22656.25 \text{ kN} \quad Q_{z21,3} = -Q_{z12,3}$$

$$M_{y23,3} = M_{y32,3} = 0 \quad Q_{z23,3} = Q_{z32,3} = 0$$

$$N_{24,3} = -N_{42,3} = 0$$

Ροπές στρέψης :

$$M_{x12,3} = M_{x21,3} = 0$$

$$M_{x23,3} = \left(\frac{G_b \cdot I_{xx23}}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_{x23} = \left(\frac{1.2083 \cdot 10^7 \cdot 9.981 \cdot 10^{-4}}{4} \right) \cdot (-1) = -3015.094 \text{ kNm} \quad M_{x32,3} = -M_{x23,3}$$

Σχήμα 19.5 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_3=1$ ".

Σημείωση:

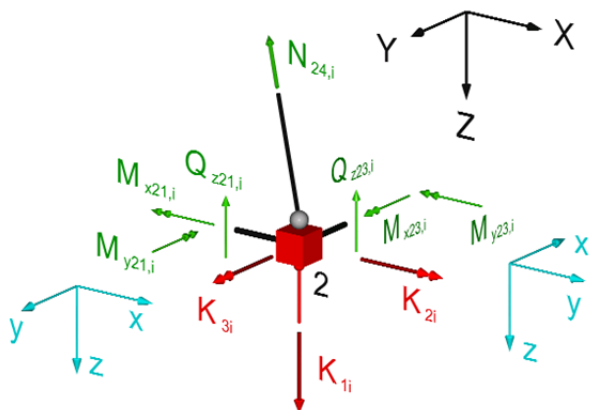
Αν και οι τελικές τέμνουσες μπορούν να υπολογιστούν άμεσα από τις τελικές ροπές βάσει των εξισώσεων ισορροπίας, υπολογίστηκαν εδώ και σε όλες τις ενδιάμεσες καταστάσεις "0" και " $\xi_i=1$ ", έτσι ώστε να μπορούν μετά τον προσδιορισμό των υπεραιθμων ξ_i , να υπολογιστούν με την αρχή της επαλληλίας ανεξάρτητα από τις τελικές ροπές.

Βήμα 4. Υπολογισμός των συντελεστών στιβαρότητας και φόρτισης

Συντελεστές στιβαρότητας K_{i1}, K_{i2}, K_{i3} ($i=1,2,3$)

Οι συντελεστές στιβαρότητας K_{ij} θα υπολογιστούν με κατάστρωση των εξισώσεων ισορροπίας των δυνάμεων και των ροπών που ενεργούν στον κόμβο 2 του ΓΚΣ, σε κάθε μία από τις τρεις μοναδιαίες καταστάσεις. Για λόγους απλότητας, θα καταστρωθούν πρώτα οι εξισώσεις ισορροπίας στη γενική τους μορφή (Σχ. 19.6), εισάγοντας όλα τα μεγέθη με τη συμβατικά θετική τους φορά και, έπειτα, θα γίνει η εφαρμογή των εξισώσεων αυτών για τα μεγέθη που αντιστοιχούν στις τρεις μοναδιαίες καταστάσεις, έτσι ώστε να προκύψουν οι τιμές των συντελεστών στιβαρότητας. Επίσης, για λόγους εποπτικότερης απεικόνισης, ο

συμβολισμός των ροπών στα παρακάτω σχήματα θα γίνει με τη μορφή διανυσμάτων στον χώρο (ευθύγραμμο βέλη με διπλή μύτη) και όχι με τα καμπύλα επίπεδα βέλη, που χρησιμοποιούνται σε επίπεδους φορείς.



$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{1i} - Q_{z21,i} - Q_{z23,i} - N_{24,i} \cdot \cos\omega = 0$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{2i} - M_{y23,i} - M_{x21,i} = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{3i} + M_{x23,i} - M_{y21,i} = 0$$

Σχήμα 19.6 Εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων και ροπών που δρουν στον κόμβο 2 του ΓΚΣ.

Σημείωση:

Η γωνία ω είναι η γωνία που σχηματίζει η ράβδος 2-4 με την κατακόρυφο και είναι ίση με $\omega = 90 - \varphi$, όπου $\varphi = 35.264^\circ$ (βλ. Σχ. 19.6).

• Κατάσταση “ $\zeta_1 = 1$ ”

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{11} - 11328.125 - 11328.125 - 11780.97 \cdot \cos(54.736) = 0 \Rightarrow K_{11} = 29458.0\text{kN}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{21} + 22656.25 - 0 = 0 \Rightarrow K_{21} = -22656.25\text{kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{31} + 0 - 22656.25 = 0 \Rightarrow K_{31} = 22656.25\text{kNm}$$

• Κατάσταση “ $\zeta_2 = 1$ ”

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{12} - 0 - (-22656.25) - 0 \cdot \cos\omega = 0 \Rightarrow K_{12} = -22656.25\text{kN}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{22} - 60416.667 - 3015.094 = 0 \Rightarrow K_{22} = 63431.76\text{kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{32} + 0 - 0 = 0 \Rightarrow K_{32} = 0$$

• Κατάσταση “ $\zeta_3 = 1$ ”

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{13} - 22656.25 - 0 - 0 \cdot \cos\omega = 0 \Rightarrow K_{13} = 22656.25\text{kN}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{23} - 0 - 0 = 0 \Rightarrow K_{23} = 0$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{33} - 3015.094 - 60416.667 = 0 \Rightarrow K_{33} = 63431.76\text{kNm}$$

Συντελεστές φόρτισης K_{i0} ($i = 1, 2, 3$)

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες ισορροπίας παίρνουμε:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow K_{10} - (-100) - (-300) - 0 \cdot \cos\omega = 0 \Rightarrow K_{10} = -400\text{kN}$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow K_{20} - 300 - 0 = 0 \Rightarrow K_{20} = 300\text{kNm}$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow K_{30} + 0 - (-100) = 0 \Rightarrow K_{30} = -100\text{kNm}$$

Βήμα 5. Κατάστροψη του συστήματος εξισώσεων ισορροπίας και υπολογισμός των ξ_i

Το σύστημα των τριών επιλυσών εξισώσεων δίνεται παρακάτω. Από την επίλυσή του προκύπτουν οι τιμές των τριών αγνώστων μεγεθών μετακίνησης ξ_i ($i=1-3$):

$$\begin{bmatrix} 29458.0 & -22656.25 & 22656.25 \\ -22656.25 & 63431.76 & 0 \\ 22656.25 & 0 & 63431.76 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -400 \\ 300 \\ -100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.019372\text{m} \\ 0.00219\text{rad} \\ -0.00534\text{rad} \end{bmatrix}$$

Βήμα 6. Τελικά μεγέθη έντασης λόγω της δεδομένης φόρτισης

Ο υπολογισμός των τελικών καμπτικών ροπών M_y και των στρεπτικών ροπών M_x επιτυγχάνεται με εφαρμογή της σχέσης επαλληλίας:

$$M_{ij} = M_{ij,0} + \sum_{k=1}^3 (M_{ij,k} \cdot \xi_k)$$

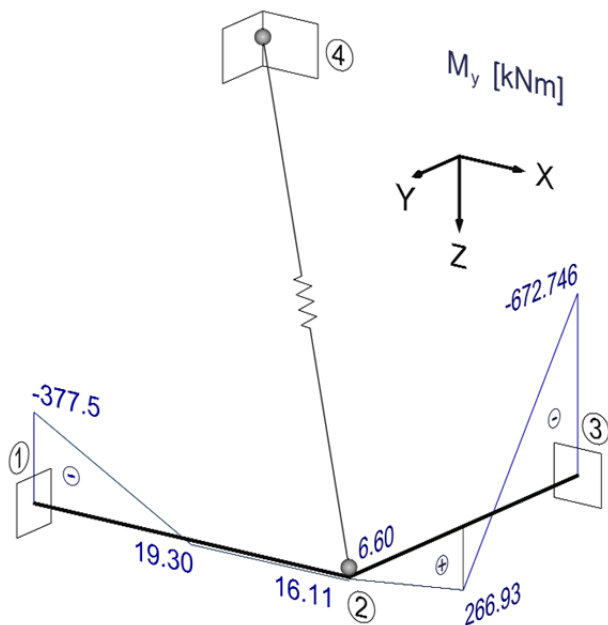
Οι τέμνουσες δυνάμεις Q_z προκύπτουν, είτε με εφαρμογή σχέσης επαλληλίας ανάλογης με αυτής των ροπών, είτε από τις ήδη υπολογισθείσες καμπτικές ροπές M_y , βάσει των συνθηκών ισορροπίας.

Ροπές M_z (και κατά συνέπεια και τέμνουσες Q_y) δεν αναπτύσσονται λόγω της μη υπάρξεως εξωτερικών φορτίων, τα οποία θα μπορούσαν να τις προκαλέσουν.

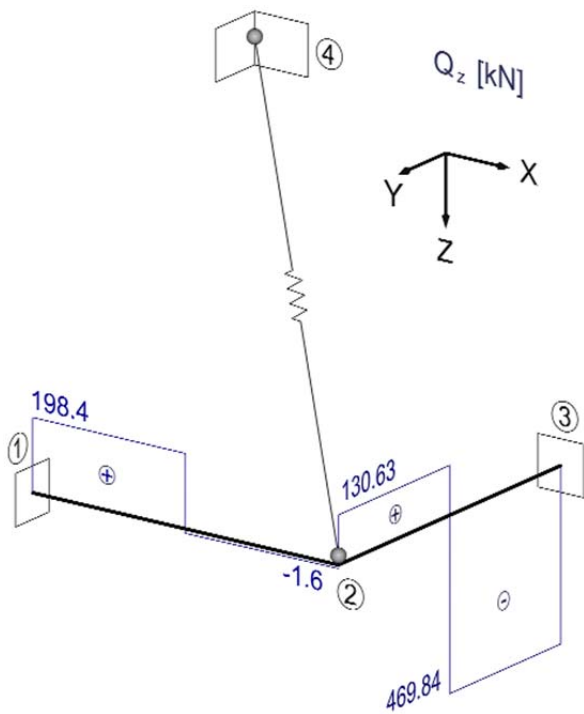
Τέλος, η αξονική δύναμη της ράβδου 2-4 υπολογίζεται ως εξής:

$$N_{24} = N_{42} = N_{24,0} + N_{24,1} \cdot \xi_1 + N_{24,2} \cdot \xi_2 + N_{24,3} \cdot \xi_3 = 0 + 11780.97 \cdot \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 + 0 \cdot \xi_3 = 11780.97 \cdot 0.019372 \Rightarrow N_{24} = 228.22\text{kN}$$

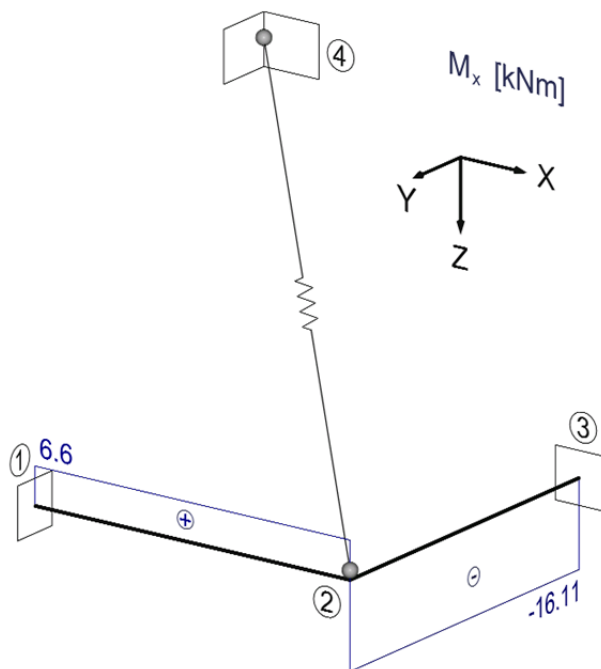
Τα διαγράμματα των ροπών M_y , M_x και Q_z παρουσιάζονται στα ακόλουθα σχήματα 19.7 έως 19.9.



Σχήμα 19.7 Διάγραμμα καμπτικών ροπών M_y .



Σχήμα 19.8 Διάγραμμα τεμνουσών δυνάμεων Q_z .



Σχήμα 19.9 Διάγραμμα στρεπτικών ροπών M_x .

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 9

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

Κεφάλαιο 10

Προσδιορισμός των βαθμών ελευθερίας

Σύνοψη

Η άσκηση 20, που περιέχεται στο κεφάλαιο αυτό, αναφέρεται σε μία μεγάλη σειρά απλών και σύνθετων στατικών φορέων, για τους οποίους ζητείται ο προσδιορισμός των βαθμών ελευθερίας τους, δηλαδή των άγνωστων μεγεθών μετακίνησης (μετατοπίσεων και στροφών) που πρέπει να υπολογιστούν μέσω της επίλυσης με τη μέθοδο μετακινήσεων (MM). Επιπλέον, ζητείται ο καθορισμός του γεωμετρικού κύριου συστήματος, με τη βοήθεια του οποίου θα γίνουν οι υπολογισμοί. Στόχος της άσκησης είναι η εμπέδωση της διαδικασίας προσδιορισμού των άγνωστων μεγεθών ενός φορέα, που πρόκειται να επιλυθεί με τη μέθοδο μετακινήσεων και η, περαιτέρω, εμβάθυνση της κατανόησης της έννοιας του βαθμού ελευθερίας.

Προαπαιτούμενη γνώση

Απαραίτητη είναι η προηγούμενη κατανόηση της θεωρίας της Μεθόδου μετακινήσεων και, οπωσδήποτε, η μελέτη των ασκήσεων των προηγούμενων κεφαλαίων. Ειδικότερα, συνιστάται η μελέτη του κεφαλαίου 5 του [1] και των παραγράφων 3.1.1 και 3.1.2 του [2].

Άσκηση 20**Εκφώνηση**

Για τους ακόλουθους φορείς 1 έως 20 να καθοριστούν:

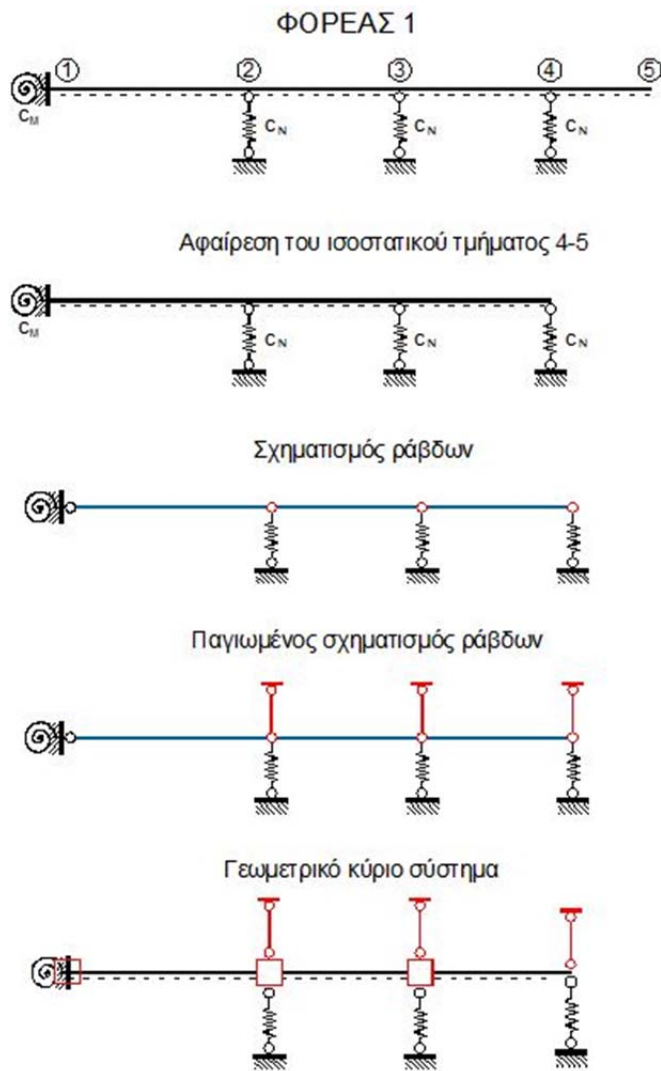
- (α) ο σχηματισμός ράβδων,
- (β) ο παγιωμένος σχηματισμός ράβδων και
- (γ) το ΓΚΣ για επίλυση με τη ΜΜ.

Οι δεδομένοι φορείς συντίθενται, γενικώς, από ατενή δομικά στοιχεία ($EA \rightarrow \infty$). Εφόσον περιέχουν στοιχεία πεπερασμένης δυστένειας, αυτά δηλώνονται ρητά ή συμβολίζονται ως ελατήρια.

Επίσης, οι φορείς έχουν, γενικώς, πεπερασμένη δυσκαμψία. Εφόσον περιέχουν άκαμπτα στοιχεία ($EI \rightarrow \infty$), αυτά δηλώνονται ρητά ή συμβολίζονται ως διαγραμμισμένα γραμμικά στοιχεία. Υπενθυμίζεται ότι η δυστημψία/ατημψία ενός φορέα δεν επηρεάζει το πλήθος των γεωμετρικώς υπεράριθμων μεγεθών.

Η πορεία, που κατά κανόνα ακολουθείται για τον προσδιορισμό του ΓΚΣ, είναι η εξής:

- (i) Καθορισμός (και αρίθμηση) των κόμβων του φορέα, έτσι ώστε τα μεγέθη έντασης κάθε δομικού στοιχείου να μπορούν να υπολογιστούν από έτοιμους πίνακες. (Στην παρούσα άσκηση δεν ζητείται η αρίθμηση κόμβων.)
- (ii) Καθορισμός των $N1$ ανεξάρτητων άγνωστων στροφών κόμβων και δέσμευση των στροφών αυτών με δικινητές πακτώσεις.
- (iii) Καθορισμός, (ενδεχομένως με τη βοήθεια του σχηματισμού ράβδων), του ελάχιστου απαιτούμενου πλήθους $N2$ των ανεξάρτητων άγνωστων μετατοπίσεων κόμβων ή άγνωστων στροφών χορδών των δοκών. Δέσμευση των μετατοπίσεων των κόμβων με δρομικές δεσμικές ράβδους και των στροφών χορδών με δικινητές πακτώσεις αντίστοιχα.
- (iv) Αρίθμηση όλων των $N=N1+N2$ πρόσθετων συνδέσμων του ΓΚΣ και καθορισμός της συμβατικά θετικής φοράς (γενικώς: κατά την έννοια των αξόνων του καθολικού συστήματος αναφοράς) των αντίστοιχων υπεραριθμών μεγεθών. Κατά προτίμηση, η αρίθμηση θα πρέπει να γίνεται με τρόπο που να ελαχιστοποιεί το εύρος του μητρώου στιβαρότητας (Στην παρούσα άσκηση δεν ζητείται η αρίθμηση των υπεραριθμών μεγεθών).



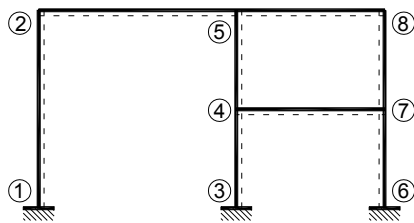
Σημείωση 1:

Η ένταση ισοστατικών τμημάτων υπολογίζεται εύκολα με τις συνθήκες ισορροπίας. Για αυτό, κατά κανόνα, ισοστατικά τμήματα αποκόπτονται και υποκαθιστώνται από τις αντιδράσεις τους επί του δεδομένου φορέα, προκειμένου να μειωθεί το πλήθος των υπεραριθμών μεγεθών.

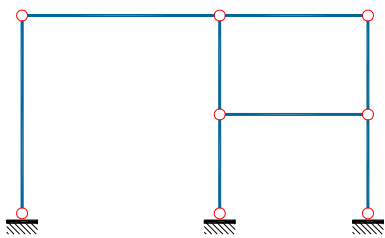
Σημείωση 2:

Οι πρόσθετες αρθρώσεις, που εισάγονται στον σχηματισμό ράβδων, όπως και οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι του ΓΚΣ, συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**.

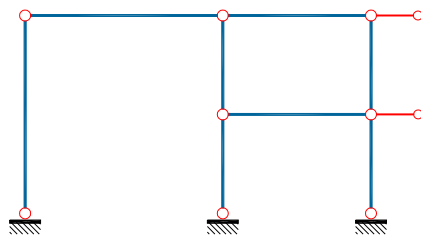
ΦΟΡΕΑΣ 2



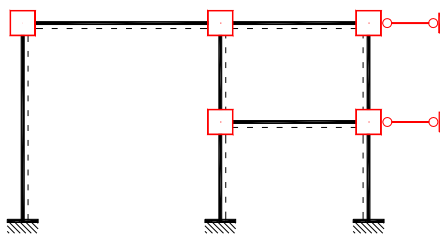
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



Γεωμετρικό κύριο σύστημα



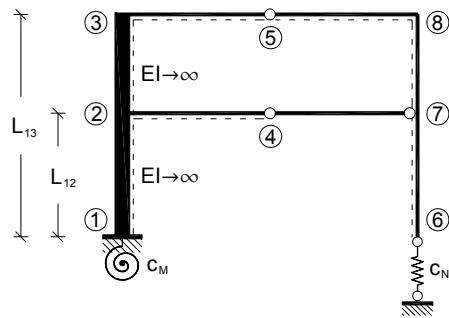
Σημείωση 1:

Εναλλακτικά, αντί των δύο οριζόντιων δεσμικών ράβδων, που δεσμεύουν τις οριζόντιες μετατοπίσεις των κόμβων 7 και 8, μπορούν να δεσμευτούν οι στροφές των χορδών των στύλων 6-7 και 7-8, μέσω προσθήκης δύο δικινητών πακτώσεων.

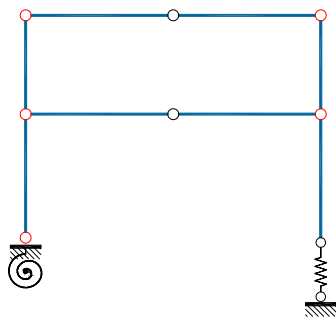
Σημείωση 2:

Οι πρόσθετες αρθρώσεις, που εισάγονται στον σχηματισμό ράβδων, όπως και οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι του ΓΚΣ, συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**.

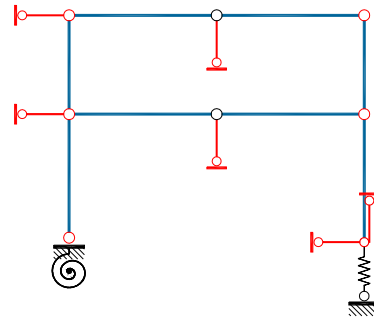
ΦΟΡΕΑΣ 3



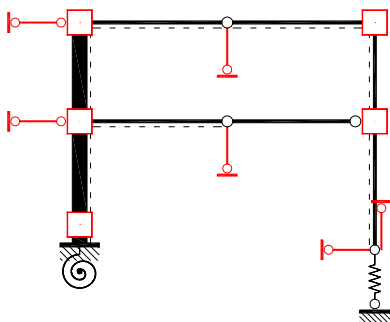
Σχηματισμός ράβδων



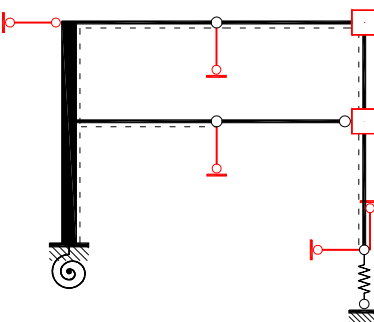
Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



Γεωμετρικό κύριο σύστημα για \$EI=\text{πεπερ.}\$



Γεωμετρικό κύριο σύστημα με την παραδοχή \$EI \to \infty\$ για το στοιχείο 1-2-3

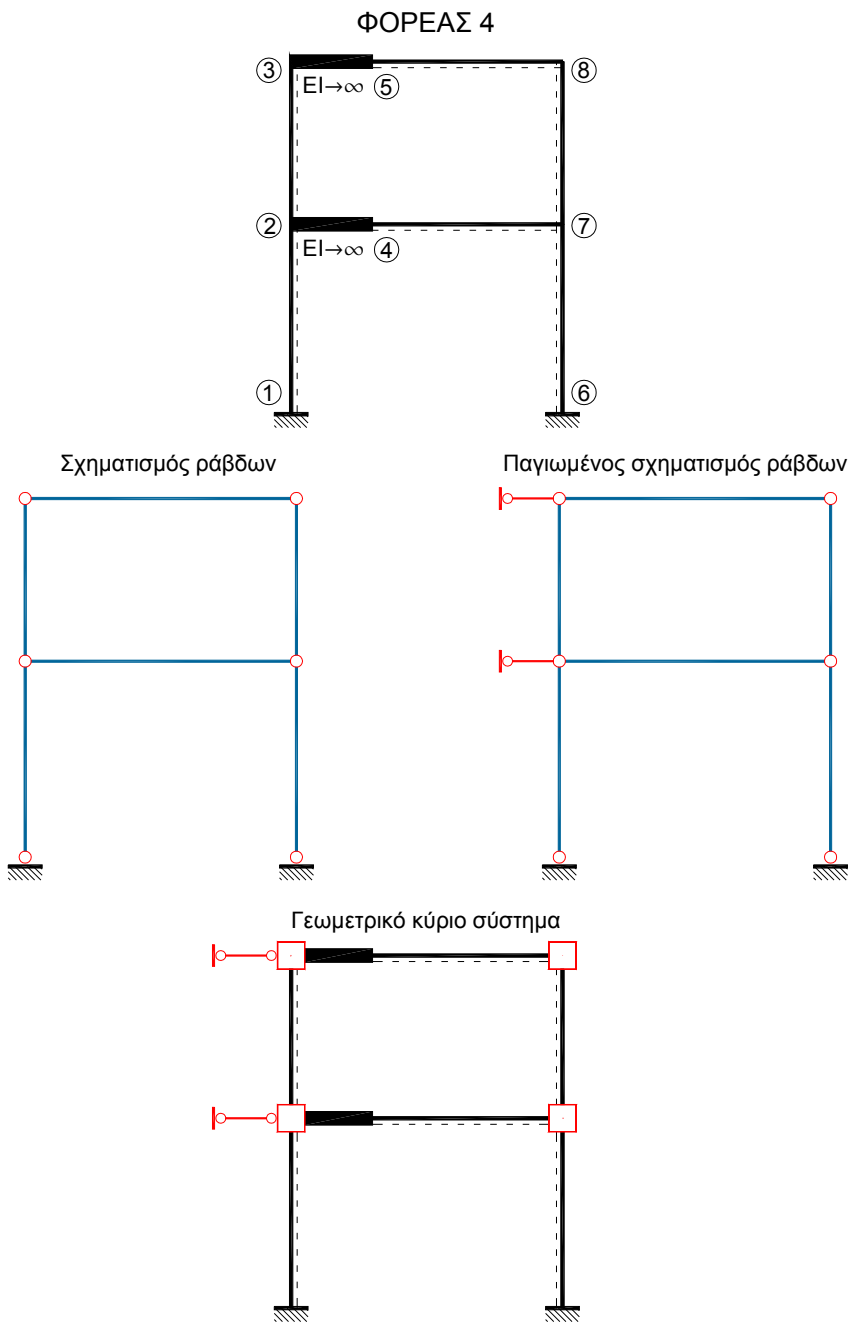


Σημείωση 1:

Λόγω της ακαμψίας του στύλου 1-2-3, η οριζόντια μετατόπιση u_3 του κόμβου 3 καθορίζει μονοσήμαντα την οριζόντια μετατόπιση $u_2 = (L_{12}/L_{13})u_3$ του κόμβου 2, καθώς και τις στροφές $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = u_3/L_{13}$ των κόμβων 1, 2 και 3. Επομένως, αρκεί η παγίωση του οριζόντιου βαθμού ελευθερίας του κόμβου 3.

Σημείωση 2:

Οι πρόσθετες αρθρώσεις, που εισάγονται στον σχηματισμό ράβδων, όπως και οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι του ΓΚΣ, συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**.

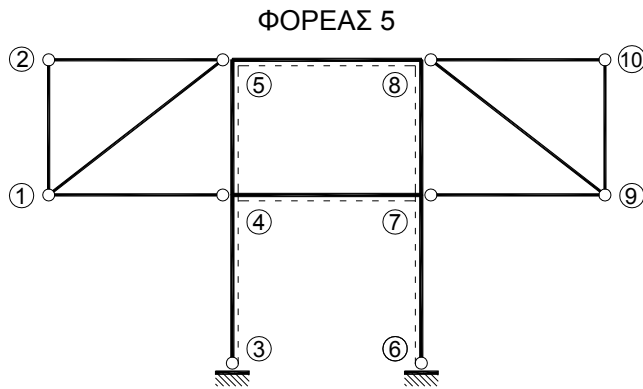


Σημείωση 1:

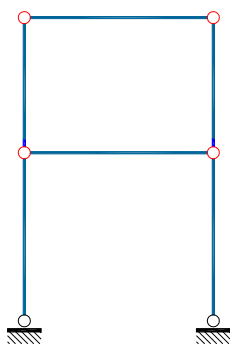
Τα σημεία 4 και 5 του φορέα δεν χρειάζεται (και δεν πρέπει) να δεσμευτούν, αφού, λόγω της ακαμψίας των τμημάτων 2-4 και 3-5, η στροφή των κόμβων 2 και 3 καθορίζει μονοσήμαντα την κατακόρυφη μετατόπιση και τη στροφή των σημείων αυτών (4 και 5).

Σημείωση 2:

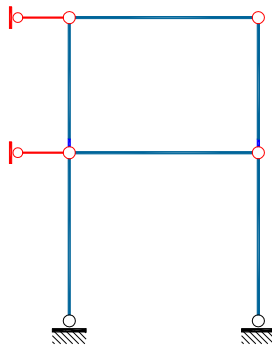
Οι πρόσθετες αρθρώσεις, που εισάγονται στον σχηματισμό ράβδων, όπως και οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι του ΓΚΣ, συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**.



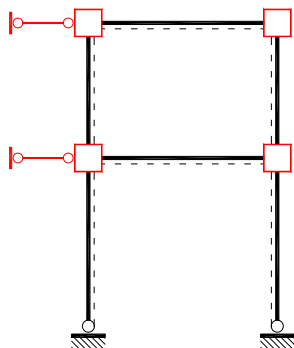
Σχηματισμός ράβδων
(αφαίρεση ισοστατικών δικτυωμάτων)



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



Γεωμετρικό κύριο σύστημα



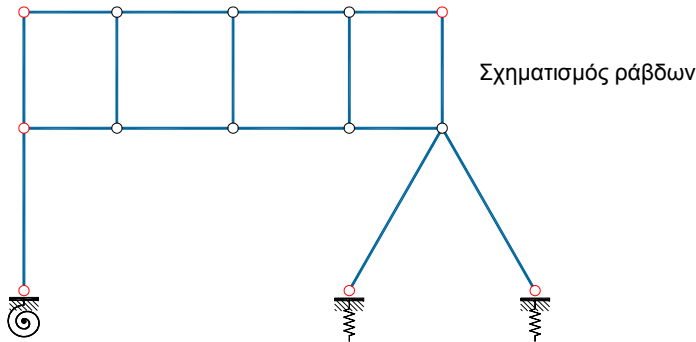
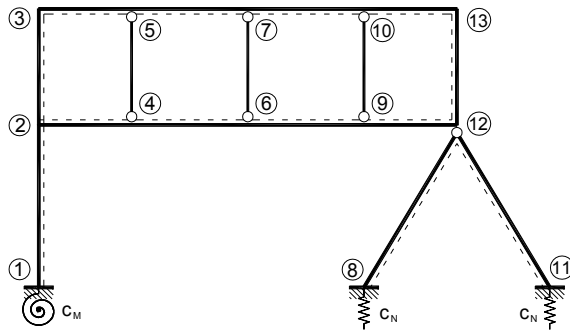
Σημείωση 1:

Η αφαίρεση ισοστατικών τμημάτων και υποφορέων και η υποκατάστασή τους από τις αντιδράσεις τους είναι σκόπιμη (→ μείωση πλήθους υπεραριθμών), όταν οι υπολογισμοί γίνονται «με το χέρι», ενώ είναι άνευ νοήματος, όταν η επίλυση γίνεται με ηλεκτρονικό υπολογιστή.

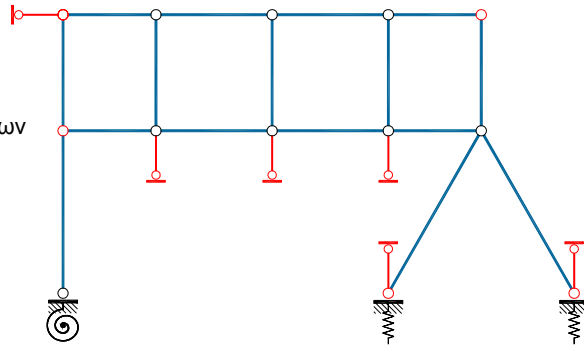
Σημείωση 2:

Οι πρόσθετες αρθρώσεις, που εισάγονται στον σχηματισμό ράβδων, όπως και οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι του ΓΚΣ, συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**.

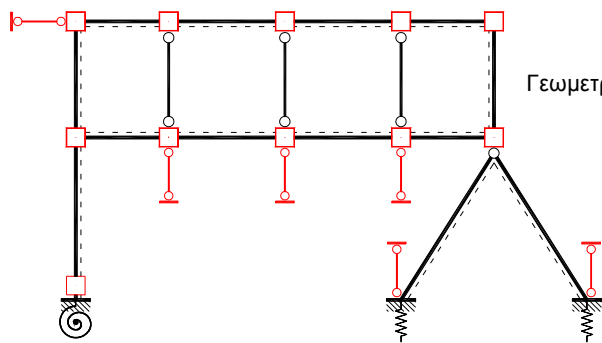
ΦΟΡΕΑΣ 6



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



Γεωμετρικό κύριο σύστημα



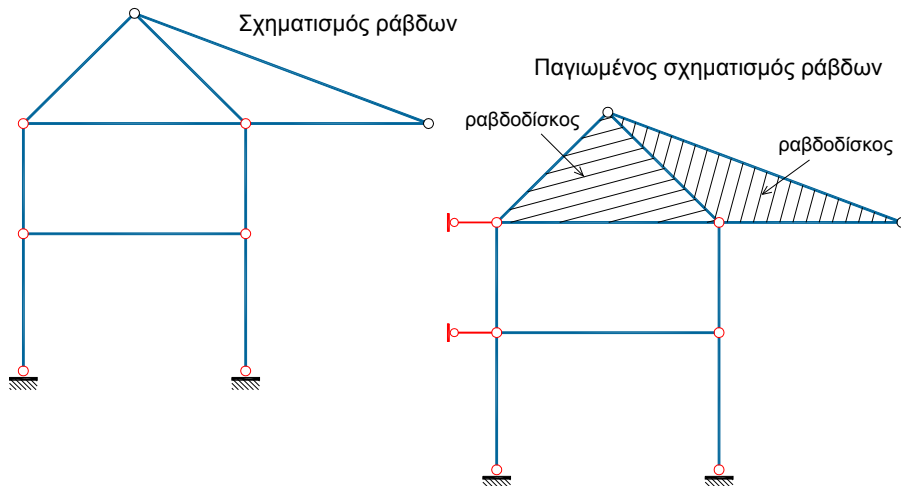
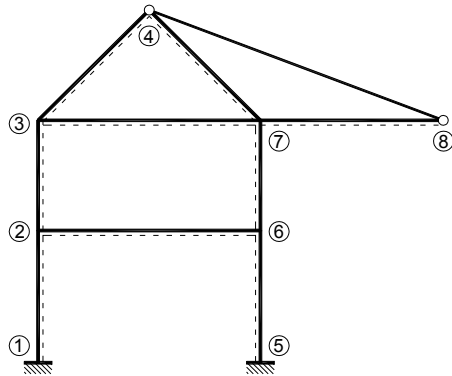
Σημείωση 1:

Η ελαστική πάκτωση του κόμβου 1 δεν επηρεάζει την στερεότητα του σχηματισμού ράβδων.

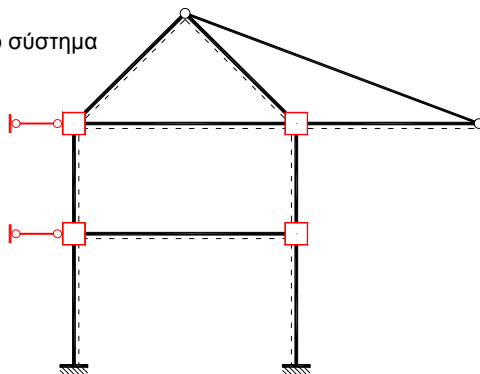
Σημείωση 2:

Οι πρόσθετες αρθρώσεις, που εισάγονται στον σχηματισμό ράβδων, όπως και οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι του ΓΚΣ, συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**.

ΦΟΡΕΑΣ 7



Γεωμετρικό κύριο σύστημα



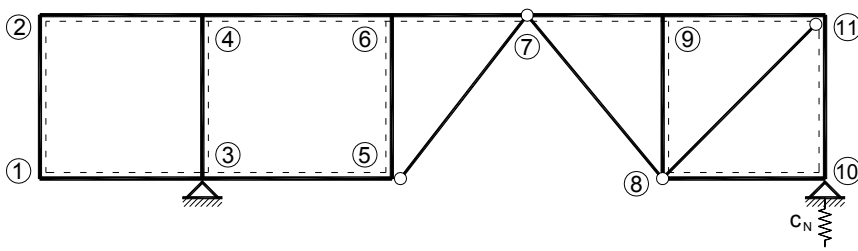
Σημείωση 1:

Ένα σύμπλεγμα τριών δομικών στοιχείων, που σχηματίζουν τριγωνικό υποφορέα (εδώ: τα "τρίγωνα" 3-4-7 και 4-7-8), ονομάζεται ραβδοδίσκος. Λόγω της ατένειας των ράβδων, η γεωμετρία του ραβδοδίσκου παραμένει αμετάβλητη («απολύτως στερεός δίσκος»).

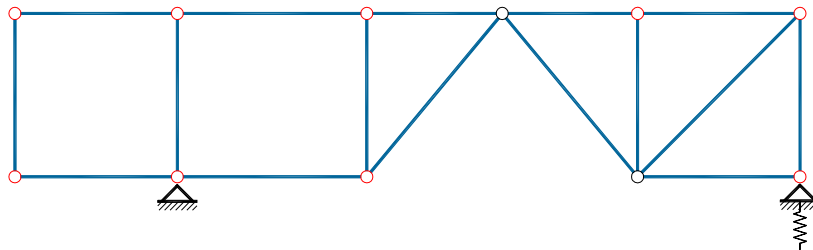
Σημείωση 2:

Οι πρόσθετες αρθρώσεις, που εισάγονται στον σχηματισμό ράβδων, όπως και οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι του ΓΚΣ, συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**.

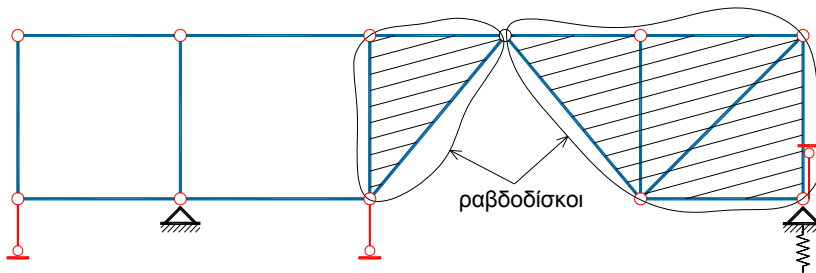
ΦΟΡΕΑΣ 8



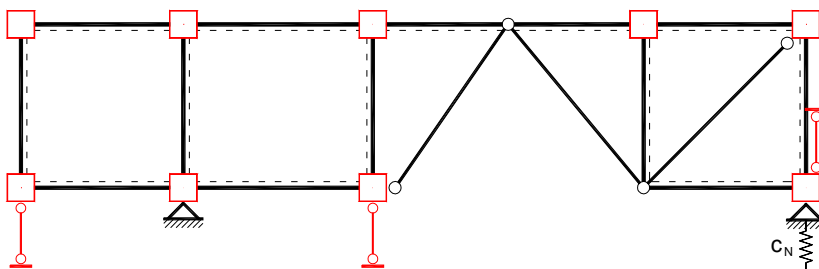
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



Γεωμετρικό κύριο σύστημα



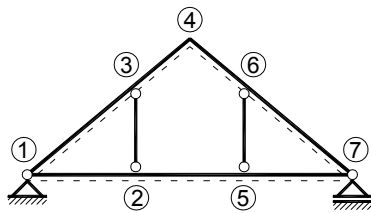
Σημείωση 1:

Τα σημειούμενα τμήματα του φορέα αποτελούν ραβδοδίσκους.

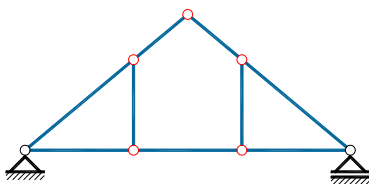
Σημείωση 2:

Οι πρόσθετες αρθρώσεις, που εισάγονται στον σχηματισμό ράβδων, όπως και οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι του ΓΚΣ, συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**.

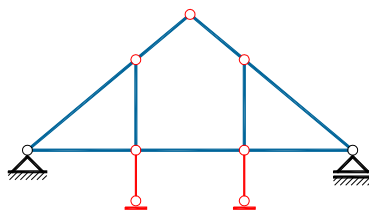
ΦΟΡΕΑΣ 9



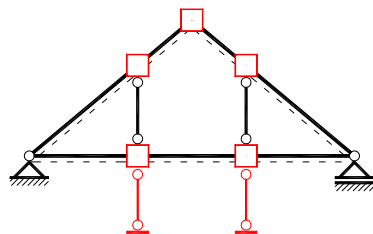
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



Γεωμετρικό κύριο σύστημα



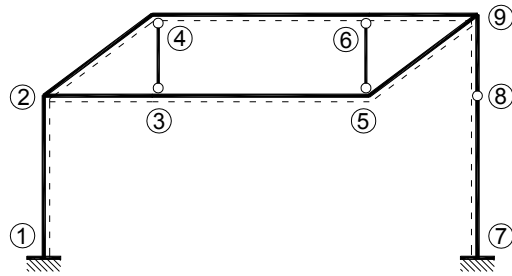
Σημείωση:

Λόγω της συμμετρίας του φορέα, και δεδομένου ότι, οποιαδήποτε φόρτιση μπορεί να διασπαστεί σε μία συμμετρική και μία αντισυμμετρική συνιστώσα, το πλήθος των υπεραριθμών μεγεθών μπορεί να μειωθεί, αν αντί μεμονωμένων υπεραριθμών εισαχθούν ομάδες υπεραριθμών μεγεθών. Εναλλακτικά, η επίλυση μπορεί να γίνει με χρήση του «μισού» φορέα, οπότε, πάλι, μειώνεται το πλήθος των υπεραριθμών μεγεθών.

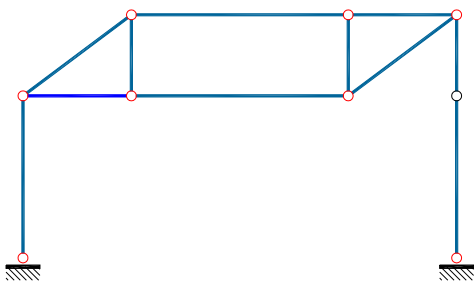
Συμπληρωματική άσκηση:

Να προσδιοριστεί το απαιτούμενο πλήθος υπεραριθμών μεγεθών για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις (i) και (ii), τόσο για συμμετρική, όσο και για αντισυμμετρική φόρτιση.

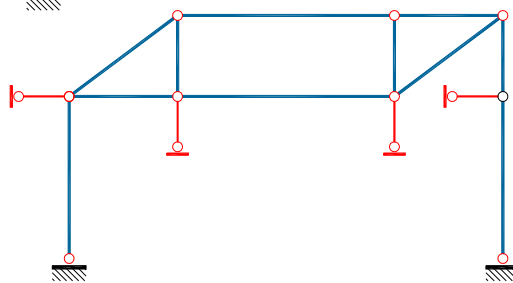
ΦΟΡΕΑΣ 10



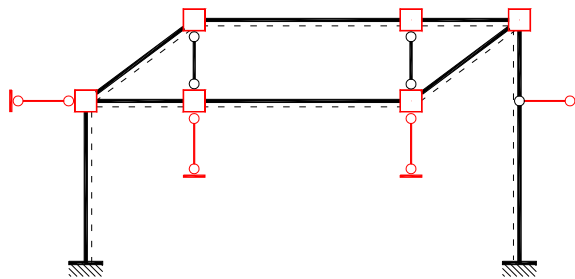
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



Γεωμετρικό κύριο σύστημα

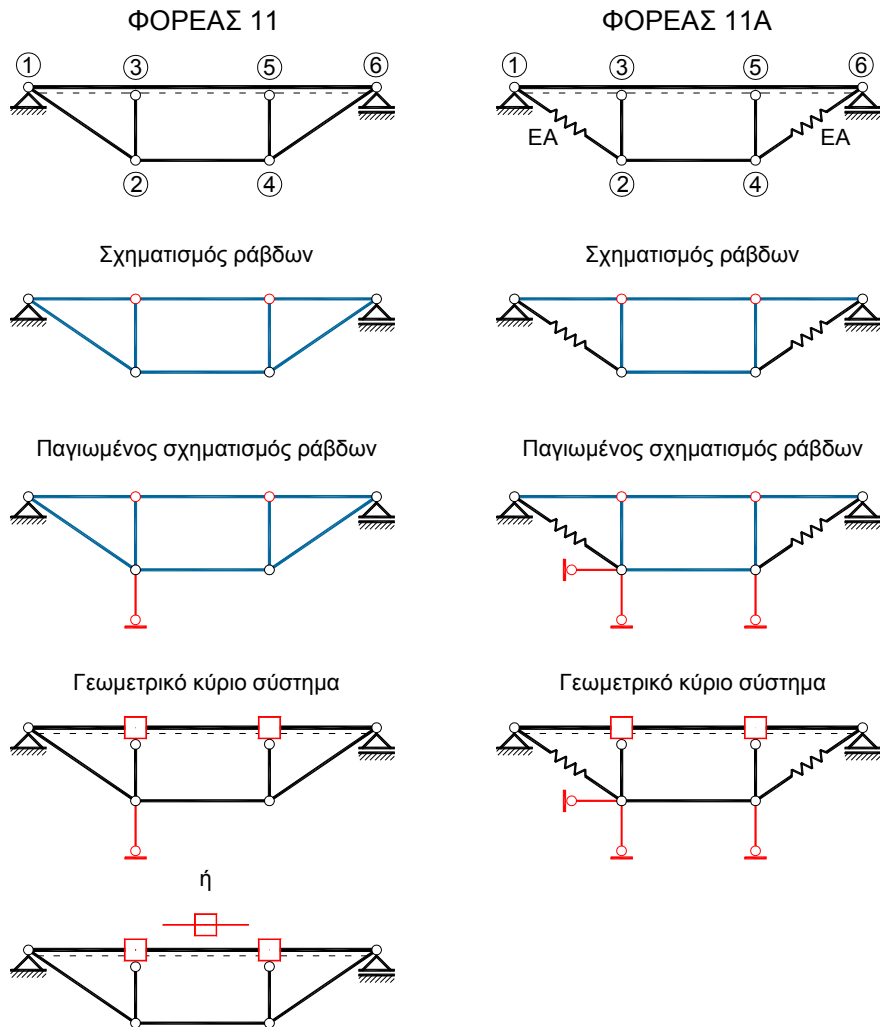


Σημείωση:

Οι πρόσθετες αρθρώσεις, που εισάγονται στον σχηματισμό ράβδων, όπως και οι πρόσθετες δεσμικές ράβδοι του ΓΚΣ, συμβολίζονται με **κόκκινο χρώμα**.

Συμπληρωματική άσκηση:

Ο αναγνώστης καλείται να προβληματιστεί, κατά πόσον η οριζόντια δεσμική ράβδος στον κόμβο 8 θα μπορούσε να παραλειφθεί.



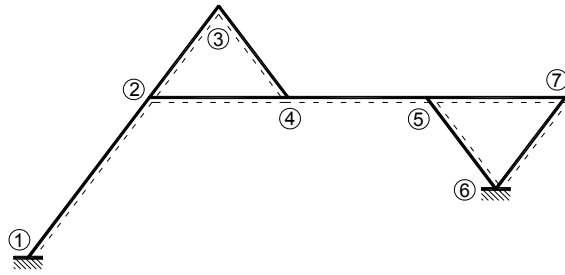
Σημείωση:

Οι ραβδοδίσκοι 1-2-3 και 4-5-6 είναι απολύτως στερεοί (δηλαδή, διατηρούν την γεωμετρία τους) στον φορέα 11, ενώ στον φορέα 11Α μπορούν να μεταβάλλουν τη μορφή τους, λόγω της πεπερασμένης δυστένειας των λοξών ράβδων.

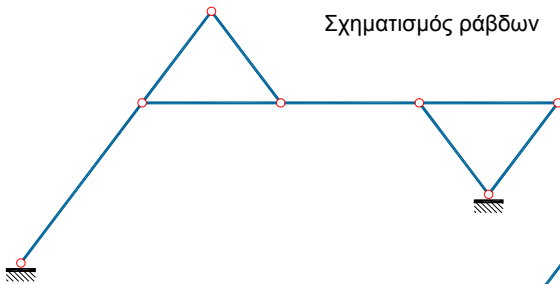
Συμπληρωματική άσκηση:

Να τεκμηριωθεί το γεγονός ότι, για συμμετρική φόρτιση οι μετατοπίσεις του ατενούς φορέα 11 είναι μηδενικές.

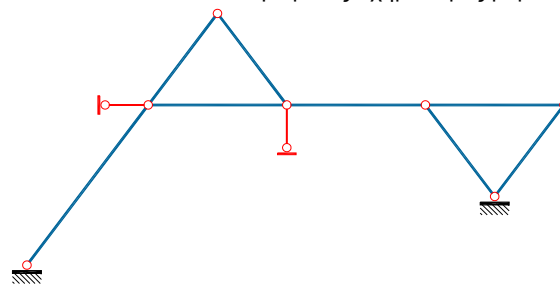
ΦΟΡΕΑΣ 12



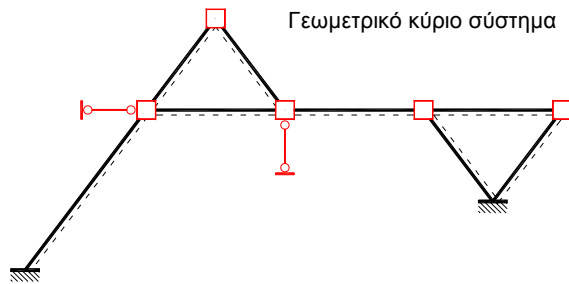
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



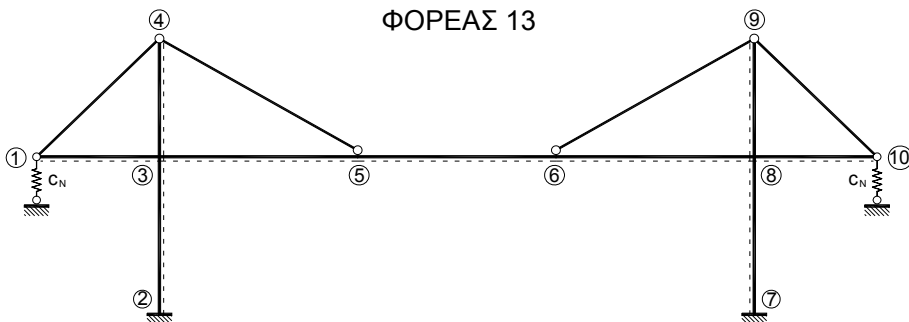
Γεωμετρικό κύριο σύστημα



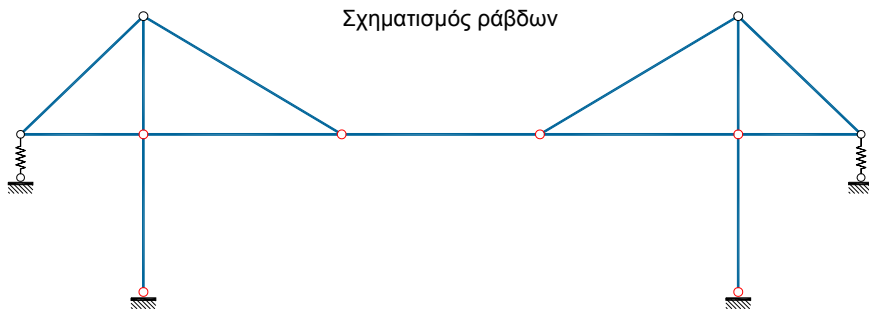
Σημείωση:

Εναλλακτικά, αντί των δύο δεσμικών ράβδων, που δεσμεύουν τις αντίστοιχες μετατοπίσεις των κόμβων 2 και 4, μπορούν να δεσμευτούν οι στροφές των χορδών των στοιχείων 1-2 και 2-4, μέσω προσθήκης δύο δικινητών πακτώσεων.

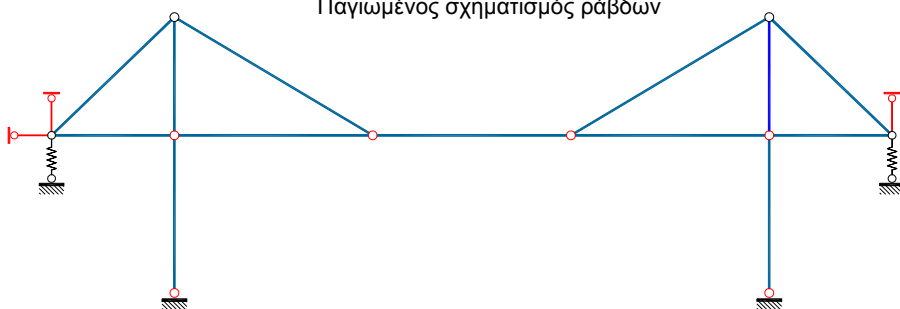
ΦΟΡΕΑΣ 13



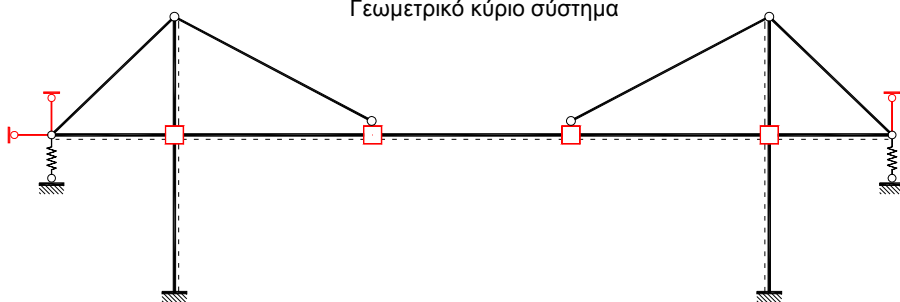
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



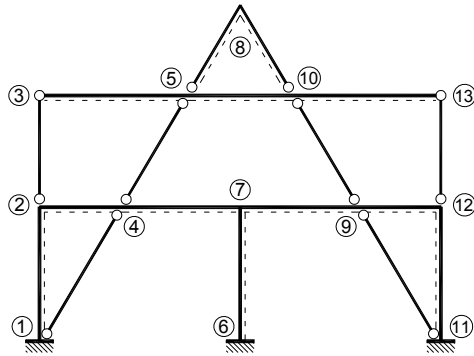
Γεωμετρικό κύριο σύστημα



Συμπληρωματική άσκηση:

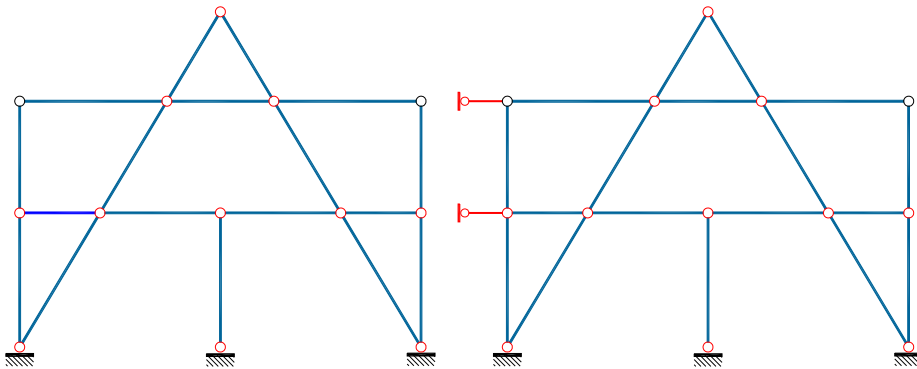
Να προσδιοριστεί το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος υπεραριθμών μεγεθών για τις περιπτώσεις (α) συμμετρικής και (β) αντισυμμετρικής φόρτισης.

ΦΟΡΕΑΣ 14

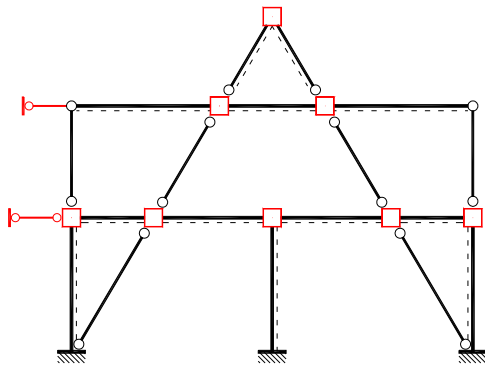


Σχηματισμός ράβδων

Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



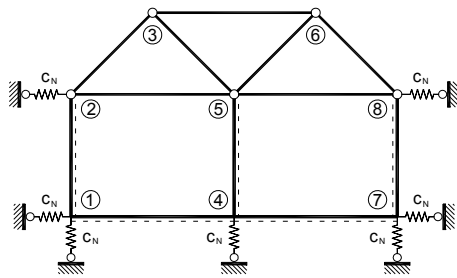
Γεωμετρικό κύριο σύστημα



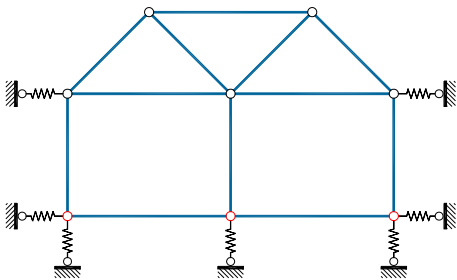
Συμπληρωματική άσκηση:

Να προσδιοριστεί το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος υπεραριθμών μεγεθών για τις περιπτώσεις (α) συμμετρικής και (β) αντισυμμετρικής φόρτισης.

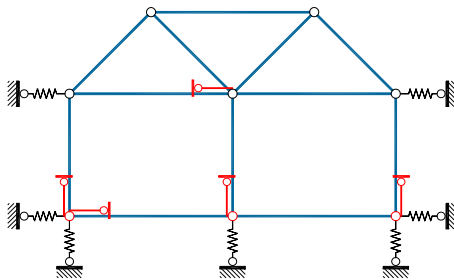
ΦΟΡΕΑΣ 15



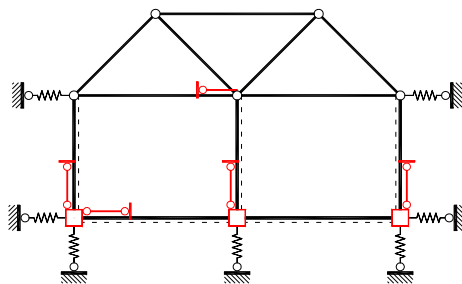
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



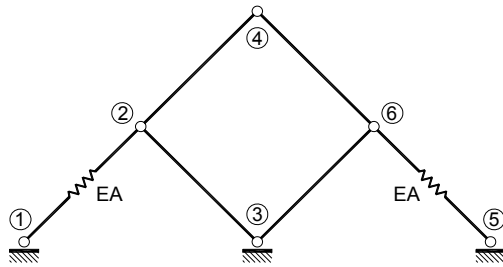
Γεωμετρικό κύριο σύστημα



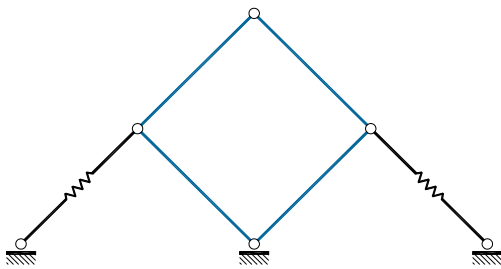
Συμπληρωματική άσκηση:

Να προσδιοριστεί το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος υπεραρίθμων μεγεθών για τις περιπτώσεις (α) συμμετρικής και (β) αντισυμμετρικής φόρτισης.

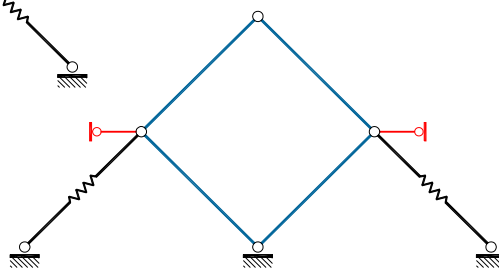
ΦΟΡΕΑΣ 16



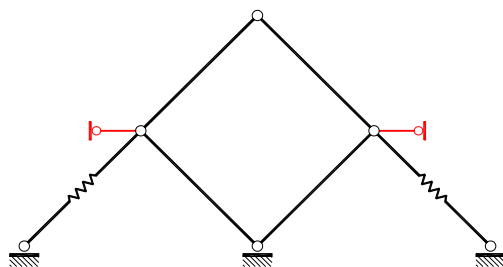
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



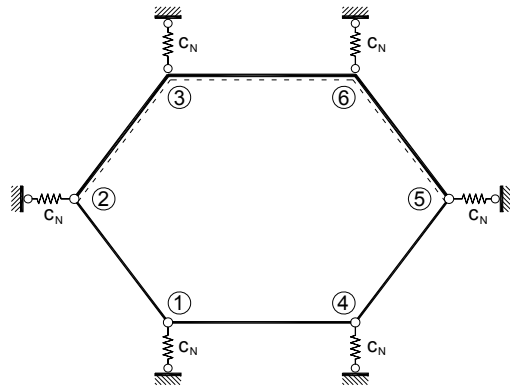
Γεωμετρικό κύριο σύστημα



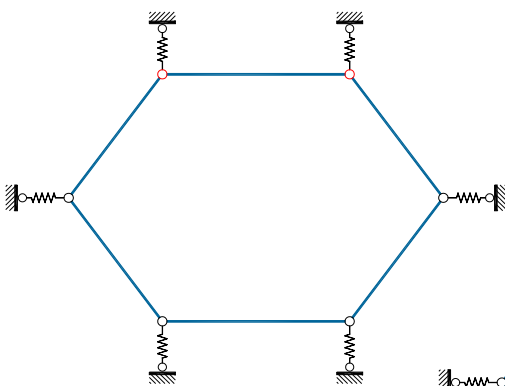
Σημείωση:

Ο δεδομένος φορέας είναι ισοστατικός, οπότε για τον προσδιορισμό της εντασιακής του κατάστασης δεν χρειάζεται η εφαρμογή της ΜΜ. Η επίλυση με την τελευταία, μας παρέχει, όμως, άμεσα τις τιμές των μετατοπίσεων. Λόγω της συμμετρίας, η επίλυση με τη ΜΜ μπορεί να περιοριστεί σε ένα μόνον υπεράριθμο μέγεθος. Εάν η σύνδεση των στοιχείων στους κόμβους ήταν μονολιθική αντί αρθρωτή και οι στηρίξεις ήταν πακτώσεις, τότε ο φορέας θα ήταν 9 φορές στατικά και 5 φορές γεωμετρικά αόριστος.

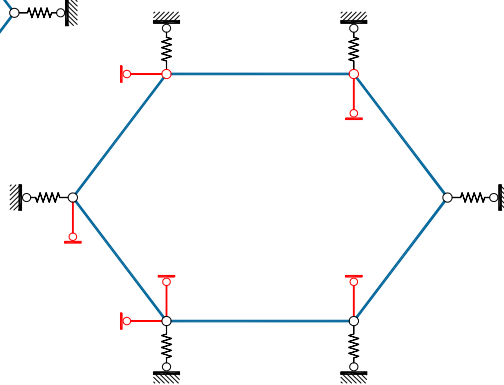
ΦΟΡΕΑΣ 17



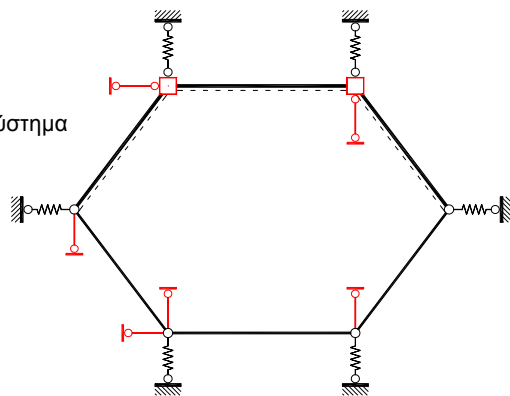
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



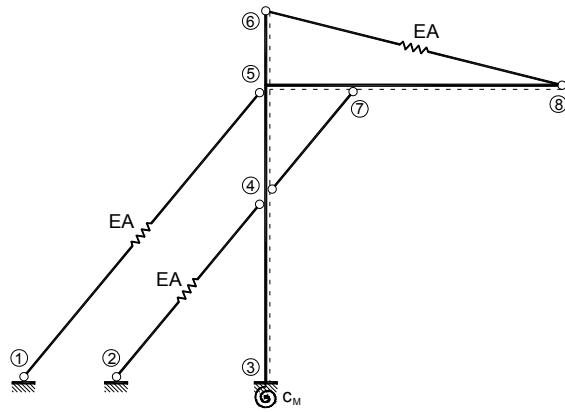
Γεωμετρικό κύριο σύστημα



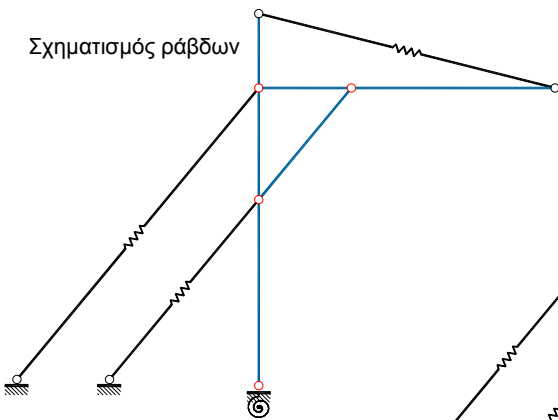
Συμπληρωματική άσκηση:

Να προσδιοριστεί το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος υπεραριθμών μεγεθών για τις περιπτώσεις (α) συμμετρικής και (β) αντισυμμετρικής φόρτισης.

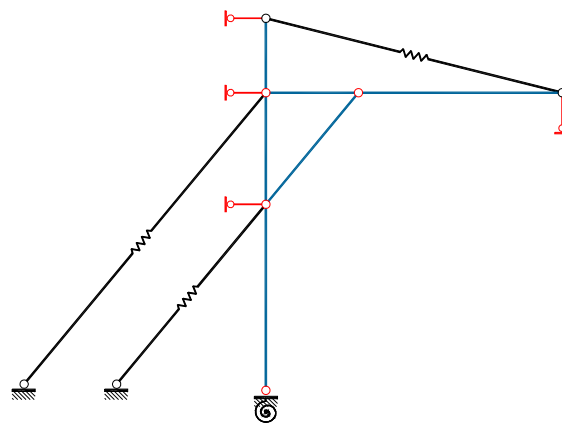
ΦΟΡΕΑΣ 18



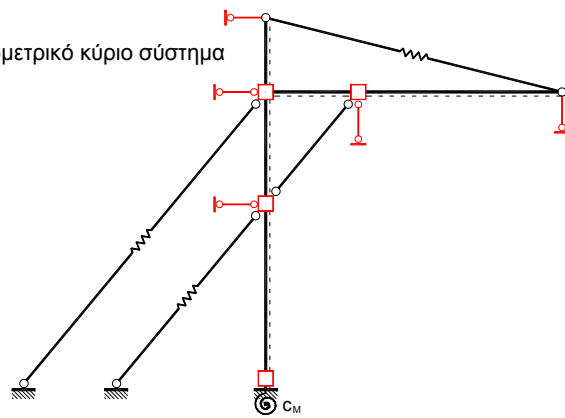
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων



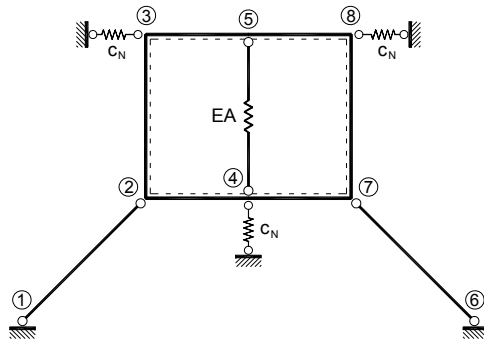
Γεωμετρικό κύριο σύστημα



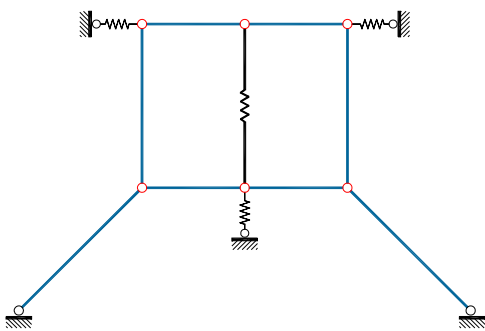
Συμπληρωματική άσκηση:

Πώς μεταβάλλεται το ΓΚΣ, αν όλες οι ράβδοι του φορέα θεωρηθούν ατενείς;

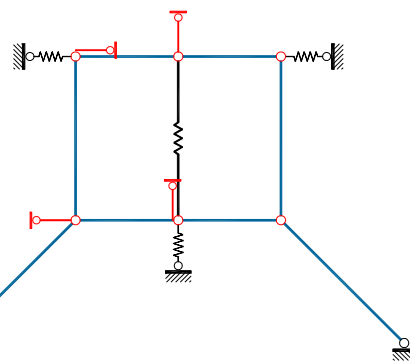
ΦΟΡΕΑΣ 19



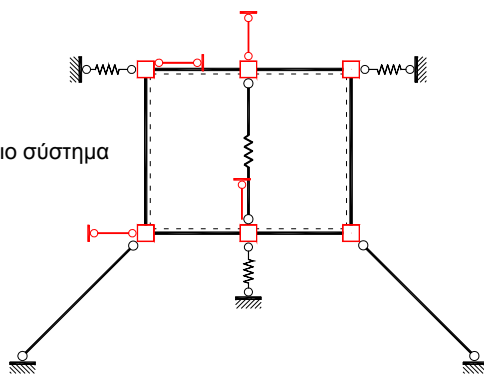
Σχηματισμός ράβδων



Παγιωμένος σχηματισμός ράβδων

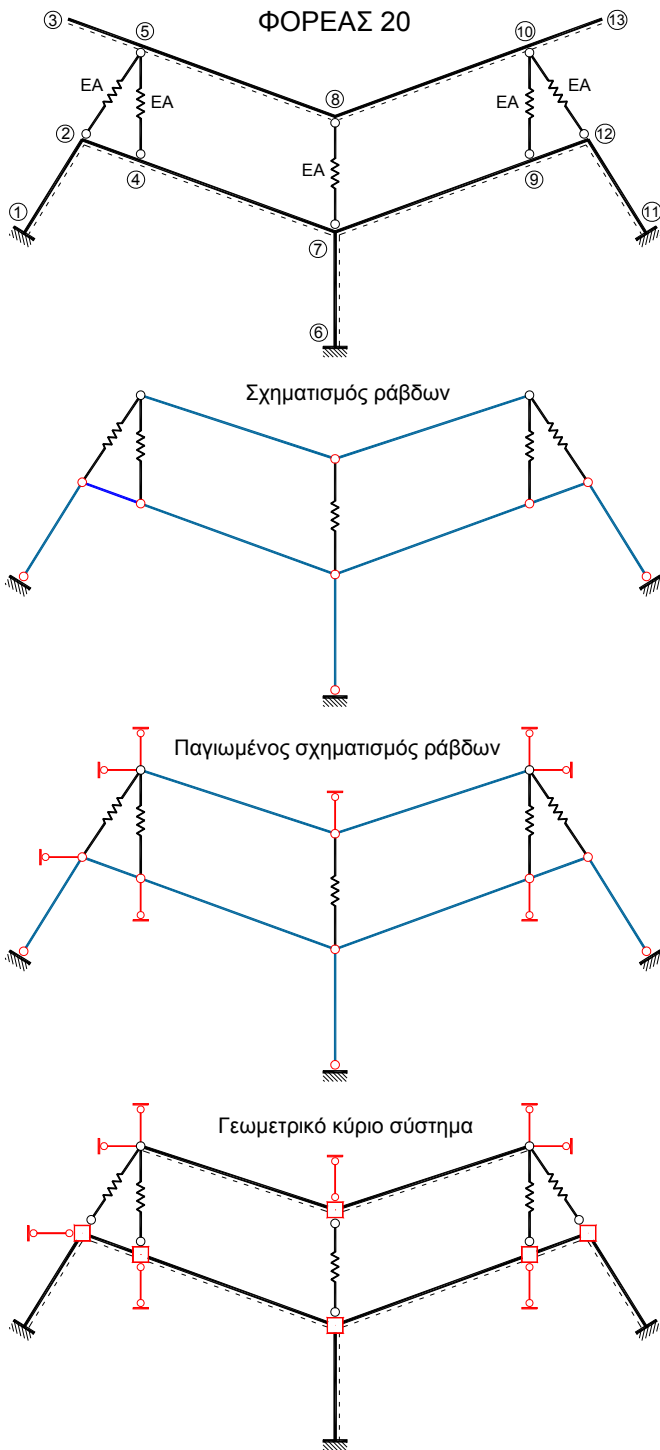


Γεωμετρικό κύριο σύστημα



Συμπληρωματική άσκηση:

Να προσδιοριστεί το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος υπεραριθμων μεγεθών για τις περιπτώσεις (α) συμμετρικής και (β) αντισυμμετρικής φόρτισης.



Συμπληρωματική άσκηση:

Να προσδιοριστεί το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος υπεραρίθμων μεγεθών για τις περιπτώσεις (α) συμμετρικής και (β) αντισυμμετρικής φόρτισης.

Βιβλιογραφικές αναφορές κεφαλαίου 10

- [1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος I: Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.
- [2] Αβραμίδης, Ι.Ε., (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος II: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ**Βοηθητικοί πίνακες**

Πίνακας 0. Ολοκληρώματα γινομένου δύο συναρτήσεων $\int f(x) \cdot g(x) dx$.

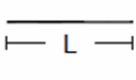

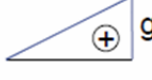

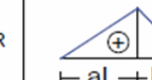
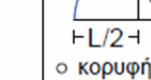
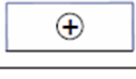


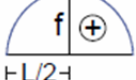
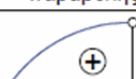
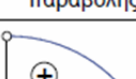
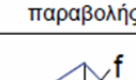
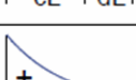
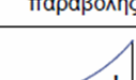
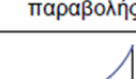
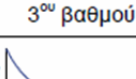
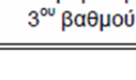
Πίνακας 1α. Βασικό στοιχείο I (αμφίπακτο) - Φορτία & εσωτερικοί καταναγκασμοί.

Πίνακας 1β. Βασικό στοιχείο I (αμφίπακτο) - Καταναγκασμένες μετακινήσεις άκρων.

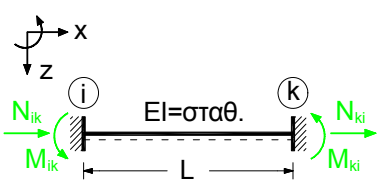
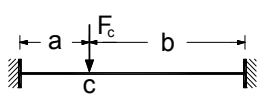
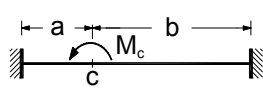
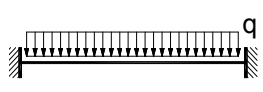
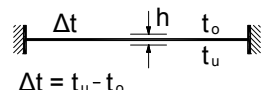
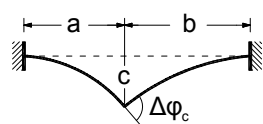
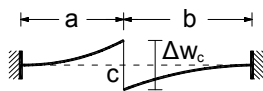
Πίνακας 2α. Βασικό στοιχείο IIα (μονόπακτο με άρθρωση δεξιά).

Πίνακας 2β. Βασικό στοιχείο IIβ (μονόπακτο με άρθρωση αριστερά).

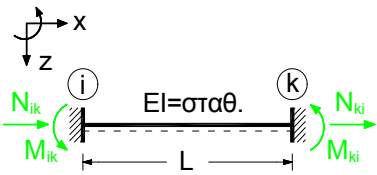
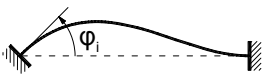

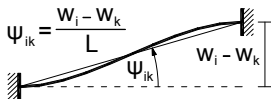
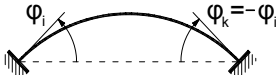
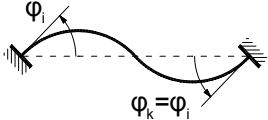

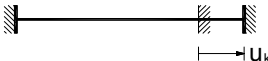
Πίνακας 3. Τύποι για άμεση επίλυση γραμμικών εξισώσεων.

					 <small> ◦ κορυφή παραβολής $L/2$ </small>
	Lfg	$\frac{1}{2}Lfg$	$\frac{1}{2}Lf \cdot (g_L + g_R)$	$\frac{1}{2}Lfg$	$\frac{2}{3}Lfg$
	$\frac{1}{2}Lfg$	$\frac{1}{3}Lfg$	$\frac{1}{6}Lf \cdot (g_L + 2g_R)$	$\frac{1}{6}Lfg \cdot (1+a)$	$\frac{1}{3}Lfg$
	$\frac{1}{2}Lfg$	$\frac{1}{6}Lfg$	$\frac{1}{6}Lf \cdot (2g_L + g_R)$	$\frac{1}{6}Lfg \cdot (1+b)$	$\frac{1}{3}Lfg$
	$\frac{1}{2}Lg \cdot (f_L + f_R)$	$\frac{1}{6}Lg \cdot (f_L + 2f_R)$	$\frac{1}{6}L \cdot (2f_L g_L + f_L g_R + f_R g_L + 2f_R g_R)$	$\frac{1}{6}Lg \cdot [f_L(1+b) + f_R(1+a)]$	$\frac{1}{3}Lg \cdot (f_L + f_R)$
 <small> ◦ κορυφή παραβολής $L/2$ </small>	$\frac{2}{3}Lfg$	$\frac{1}{3}Lfg$	$\frac{1}{3}Lf \cdot (g_L + g_R)$	$\frac{1}{3}Lfg \cdot (1+ab)$	$\frac{8}{15}Lfg$
 <small> ◦ κορυφή παραβολής </small>	$\frac{2}{3}Lfg$	$\frac{5}{12}Lfg$	$\frac{1}{12}Lf \cdot (3g_L + 5g_R)$	$\frac{1}{12}Lfg \cdot (5-b-b^2)$	$\frac{7}{15}Lfg$
 <small> ◦ κορυφή παραβολής </small>	$\frac{2}{3}Lfg$	$\frac{1}{4}Lfg$	$\frac{1}{12}Lf \cdot (5g_L + 3g_R)$	$\frac{1}{12}Lfg \cdot (5-a-a^2)$	$\frac{7}{15}Lfg$
	$\frac{1}{2}Lfg$	$\frac{1}{6}Lfg \cdot (1+c)$	$\frac{1}{6}Lg \cdot [g_L(1+d) + g_R(1+c)]$	$\frac{1}{6}Lfg \cdot \frac{2c-c^2-a^2}{bc}$ για $c > a$	$\frac{1}{3}Lfg \cdot (1+cd)$
 <small> ◦ κορυφή παραβολής </small>	$\frac{1}{3}Lfg$	$\frac{1}{12}Lfg$	$\frac{1}{12}Lf \cdot (3g_L + g_R)$	$\frac{1}{12}Lfg \cdot (5+b+b^2)$	$\frac{1}{5}Lfg$
 <small> ◦ κορυφή παραβολής </small>	$\frac{1}{3}Lfg$	$\frac{1}{4}Lfg$	$\frac{1}{12}Lf \cdot (g_L + 3g_R)$	$\frac{1}{12}Lfg \cdot (5+a+a^2)$	$\frac{1}{5}Lfg$
 <small> παραβολή 3ου βαθμού </small>	$\frac{1}{4}Lfg$	$\frac{1}{5}Lfg$	$\frac{1}{20}Lf \cdot (g_L + 4g_R)$	$\frac{1}{20}Lfg \cdot (1+a) \cdot (1+a^2)$	$\frac{2}{15}Lfg$
 <small> παραβολή 3ου βαθμού </small>	$\frac{1}{4}Lfg$	$\frac{1}{20}Lfg$	$\frac{1}{20}Lf \cdot (4g_L + g_R)$	$\frac{1}{20}Lfg \cdot (1+b) \cdot (1+b^2)$	$\frac{2}{15}Lfg$

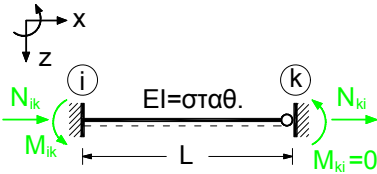
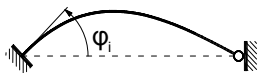
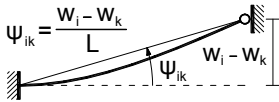
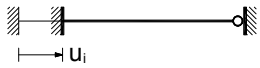
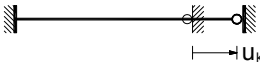
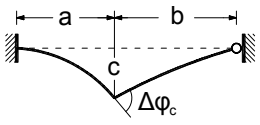
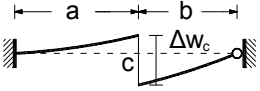
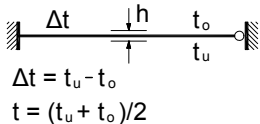
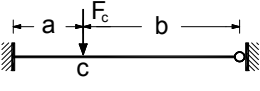
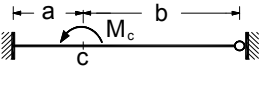
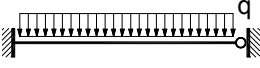
Πίνακας 0. Ολοκληρώματα γινόμενου δύο συναρτήσεων $\int_0^L f(x) \cdot g(x) dx$

<p>Φόρτιση</p>		<p>Άτμητο: $GA_s \rightarrow \infty$</p> <p>Τμήσιμο: $GA_s \neq \infty$</p> $\rho = \frac{EI}{GA_s L^2}$
	$M_{ik} = F_c a \frac{b^2}{L^2}$ $M_{ki} = -F_c b \frac{a^2}{L^2}$ $M_{ik} = F_c L \frac{ab}{L^2} \left[\frac{(b/L) + 6\rho}{1 + 12\rho} \right]$ $M_{ki} = -F_c L \frac{ab}{L^2} \left[\frac{(a/L) + 6\rho}{1 + 12\rho} \right]$	
	$M_{ik} = M_c \frac{b}{L} \left(1 - 3 \frac{a}{L} \right)$ $M_{ki} = -M_c \frac{a}{L} \left(1 - 3 \frac{b}{L} \right)$ $M_{ik} = M_c \frac{b}{L} \left[1 - \frac{3(a/L)}{1 + 12\rho} \right]$ $M_{ki} = -M_c \frac{a}{L} \left[1 - \frac{3(b/L)}{1 + 12\rho} \right]$	
	$M_{ik} = \frac{qL^2}{12}$ $M_{ki} = -\frac{qL^2}{12}$	
 <p>$\Delta t = t_u - t_o$ $t = (t_u + t_o)/2$</p>	$M_{ik} = EI \frac{\alpha_t \Delta t}{h}$ $M_{ki} = -EI \frac{\alpha_t \Delta t}{h}$ $N_{ik} = EA \alpha_t t$ $N_{ki} = -EA \alpha_t t$	
	$M_{ik} = \left(4 - 6 \frac{a}{L} \right) \frac{EI}{L} \Delta \phi_c$ $M_{ki} = \left(-4 + 6 \frac{b}{L} \right) \frac{EI}{L} \Delta \phi_c$ $M_{ik} = \left[1 + \frac{3 - 6(a/L)}{1 + 12\rho} \right] \frac{EI}{L} \Delta \phi_c$ $M_{ki} = - \left[1 + \frac{3 - 6(b/L)}{1 + 12\rho} \right] \frac{EI}{L} \Delta \phi_c$	
	$M_{ik} = M_{ki} = -\frac{6EI}{L^2} \Delta w_c$ $M_{ik} = M_{ki} = - \left(\frac{6}{1 + 12\rho} \right) \frac{EI}{L^2} \Delta w_c$	

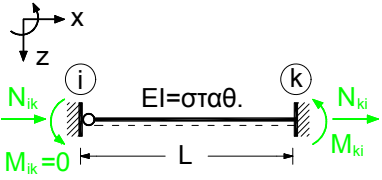
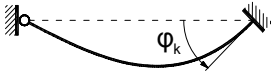
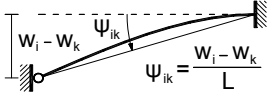
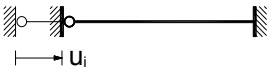

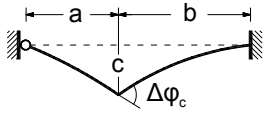
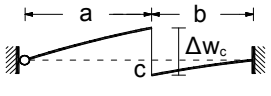
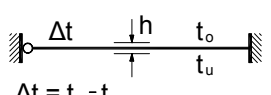
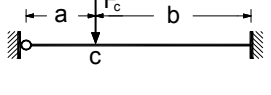
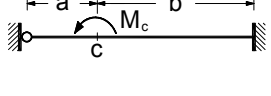
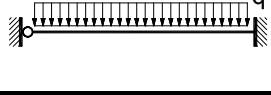
Πίνακας 1α. Βασικό στοιχείο I (αμφίπακτο) – Φορτία & εσωτερικοί καταναγκασμοί.

Φόρτιση		Ατμητο: $GA_s \rightarrow \infty$ Τμήσιμο: $GA_s \neq \infty$ $\rho = \frac{EI}{GA_s L^2}$
	$M_{ik} = \frac{4EI}{L} \phi_i$ $M_{ik} = \left(\frac{3}{1+12\rho} + 1 \right) \frac{EI}{L} \phi_i$	$M_{ki} = \frac{2EI}{L} \phi_i$ $M_{ki} = \left(\frac{3}{1+12\rho} - 1 \right) \frac{EI}{L} \phi_i$
	$M_{ik} = \frac{2EI}{L} \phi_k$ $M_{ik} = \left(\frac{3}{1+12\rho} - 1 \right) \frac{EI}{L} \phi_k$	$M_{ki} = \frac{4EI}{L} \phi_k$ $M_{ki} = \left(\frac{3}{1+12\rho} + 1 \right) \frac{EI}{L} \phi_k$
	$M_{ik} = -\frac{6EI}{L} \psi_{ik}$ $M_{ik} = -\left(\frac{6}{1+12\rho} \right) \frac{EI}{L} \psi_{ik}$	$M_{ki} = -\frac{6EI}{L} \psi_{ik}$ $M_{ki} = -\left(\frac{6}{1+12\rho} \right) \frac{EI}{L} \psi_{ik}$
	$M_{ik} = \frac{2EI}{L} \phi_i$	$M_{ki} = -\frac{2EI}{L} \phi_i$
	$M_{ik} = \frac{6EI}{L} \phi_i$ $M_{ik} = \left(\frac{6}{1+12\rho} \right) \frac{EI}{L} \phi_i$	$M_{ki} = \frac{6EI}{L} \phi_i$ $M_{ki} = \left(\frac{6}{1+12\rho} \right) \frac{EI}{L} \phi_i$
	$N_{ik} = \frac{EA}{L} u_i$	$N_{ki} = -\frac{EA}{L} u_i$
	$N_{ik} = -\frac{EA}{L} u_k$	$N_{ki} = \frac{EA}{L} u_k$

Πίνακας 1β. Βασικό στοιχείο I (αμφίπακτο) – Καταναγκασμένες μετακινήσεις άκρων.

Φόρτιση		Άτμητο: $GA_s \rightarrow \infty$ Τμήσιμο: $GA_s \neq \infty$ $\rho = \frac{EI}{GA_s L^2}$
	$M_{ik} = \frac{3EI}{L} \varphi_i$	$M_{ik} = \frac{3EI}{L} \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \varphi_i$
	$M_{ik} = -\frac{3EI}{L} \psi_{ik}$	$M_{ik} = -\frac{3EI}{L} \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \psi_{ik}$
	$N_{ik} = \frac{EA}{L} u_i$	$N_{ki} = -\frac{EA}{L} u_i$
	$N_{ik} = -\frac{EA}{L} u_k$	$N_{ki} = \frac{EA}{L} u_k$
	$M_{ik} = \frac{3EI}{L} \left(\frac{b}{L} \right) \Delta\varphi_c$	$M_{ik} = \frac{3EI}{L} \left(\frac{b}{L} \right) \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \Delta\varphi_c$
	$M_{ik} = -\frac{3EI}{L^2} \Delta w_c$	$M_{ik} = -\frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \Delta w_c$
	$M_{ik} = 1.5 \left(EI \frac{\alpha \Delta t}{h} \right)$ $N_{ik} = -N_{ki} = EA \alpha_t t$	$M_{ik} = 1.5 \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \left(EI \frac{\alpha \Delta t}{h} \right)$
	$M_{ik} = \frac{F_c b}{2} \left(1 - \frac{b^2}{L^2} \right)$	$M_{ik} = \frac{F_c b}{2} \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \left(1 - \frac{b^2}{L^2} \right)$
	$M_{ik} = -\frac{M_c}{2} \left(3 \frac{b^2}{L^2} - 1 \right)$	$M_{ik} = -\frac{M_c}{2} \left[\frac{3(b^2/L^2) - 3}{1+3\rho} + 2 \right]$
	$M_{ik} = \frac{qL^2}{8}$	$M_{ik} = \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \frac{qL^2}{8}$

Πίνακας 2α. Βασικό στοιχείο Ια (μονόπακτο με άρθρωση δεξιά).

Φόρτιση		Ατμητο: $GA_s \rightarrow \infty$ Τμήσιμο: $GA_s \neq \infty$ $\rho = \frac{EI}{GA_s L^2}$
	$M_{ki} = \frac{3EI}{L} \varphi_k$	$M_{ki} = \frac{3EI}{L} \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \varphi_k$
	$M_{ki} = -\frac{3EI}{L} \psi_{ik}$	$M_{ki} = -\frac{3EI}{L} \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \psi_{ik}$
	$N_{ik} = \frac{EA}{L} u_i$	$N_{ki} = -\frac{EA}{L} u_i$
	$N_{ik} = -\frac{EA}{L} u_k$	$N_{ki} = \frac{EA}{L} u_k$
	$M_{ki} = -\frac{3EI}{L} \left(\frac{b}{L} \right) \Delta \varphi_c$	$M_{ki} = -\frac{3EI}{L} \left(\frac{b}{L} \right) \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \Delta \varphi_c$
	$M_{ki} = -\frac{3EI}{L^2} \Delta w_c$	$M_{ki} = -\frac{3EI}{L^2} \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \Delta w_c$
 <p>$\Delta t = t_u - t_o$ $t = (t_u + t_o)/2$</p>	$M_{ki} = -1.5 \left(EI \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right)$ $N_{ik} = -N_{ki} = EA \alpha_t t$	$M_{ki} = -1.5 \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \left(EI \frac{\alpha_t \Delta t}{h} \right)$
	$M_{ki} = -\frac{F_c a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{L^2} \right)$	$M_{ki} = -\frac{F_c a}{2} \left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \left(1 - \frac{a^2}{L^2} \right)$
	$M_{ki} = -\frac{M_c}{2} \left(3 \frac{a^2}{L^2} - 1 \right)$	$M_{ki} = -\frac{M_c}{2} \left[\frac{3(a^2/L^2) - 3}{1+3\rho} + 2 \right]$
	$M_{ki} = -\frac{qL^2}{8}$	$M_{ki} = -\left(\frac{1}{1+3\rho} \right) \frac{qL^2}{8}$

Πίνακας 2β. Βασικό στοιχείο Πβ (μονόπακτο με άρθρωση αριστερά).

$N=1:$	$\xi_1 \cdot K_{11} + K_{10} = 0$	$\xi_1 = -\frac{K_{10}}{K_{11}}$
$N=2:$	$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{10} \\ K_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ $K_{ik} = K_{ki}$	$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{10} \\ K_{20} \end{bmatrix}$ $B_{ik} = B_{ki}$
	<p>όπου $B_{11} = -K_{22}/D$ $B_{12} = K_{12}/D$ $B_{22} = -K_{11}/D$</p> <p>$D = K_{11} \cdot K_{22} - K_{12}^2$</p>	
$N=3:$	$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{10} \\ K_{20} \\ K_{30} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ $K_{ik} = K_{ki}$	$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_{10} \\ K_{20} \\ K_{30} \end{bmatrix}$ $B_{ik} = B_{ki}$
	<p>όπου:</p> $B_{11} = (-K_{22} \cdot K_{33} + K_{23}^2)/D$ $B_{12} = (K_{12} \cdot K_{33} - K_{13} \cdot K_{23})/D$ $B_{22} = (-K_{11} \cdot K_{33} + K_{13}^2)/D$ $B_{13} = (K_{13} \cdot K_{22} - K_{12} \cdot K_{23})/D$ $B_{33} = (-K_{11} \cdot K_{22} + K_{12}^2)/D$ $B_{23} = (K_{23} \cdot K_{11} - K_{13} \cdot K_{12})/D$ $D = K_{11} \cdot K_{22} \cdot K_{33} + 2 \cdot K_{12} \cdot K_{23} \cdot K_{13} - K_{13}^2 \cdot K_{22} - K_{23}^2 \cdot K_{11} - K_{12}^2 \cdot K_{33}$	

Πίνακας 3. Τύποι για άμεση επίλυση γραμμικών εξισώσεων.

Το προς επίλυση σύστημα των N γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας της MM γράφεται συμβολικά:

$$[K_{mn}] \cdot [\xi_m] + [K_{m0}] = [0] \quad \text{ή} \quad \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$$

Το μητρώο $\mathbf{K} = [K_{mn}]$ είναι τετραγωνικό NxN και συμμετρικό ($K_{mn} = K_{nm}$), οι διαγώνιοι συντελεστές είναι όλοι θετικοί ($K_{nn} > 0$) και η ορίζουσα μη μηδενική ($\det \mathbf{K} \neq 0$). Τα άγνωστα μεγέθη ξ προκύπτουν με αντιστροφή του \mathbf{K} :

$$\boldsymbol{\xi} = -\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{K}_0 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}_0, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{B} = -\mathbf{K}^{-1}$$

Η επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων γίνεται κατά κανόνα με την μέθοδο Gauss ή κάποια παραλλαγή της και χρήση ηλεκτρονικής αριθμομηχανής ή υπολογιστή. Για N=2 και N=3 δίνονται ακολούθως γενικοί τύποι για τον άμεσο υπολογισμό των αγνώστων ξ .

Σύντομη περιγραφή των βασικών βιβλιογραφικών πηγών του παρόντος συγγράμματος

[1] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2014). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος Ι : Θεμελιώδεις αρχές και ισοστατικοί φορείς*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.

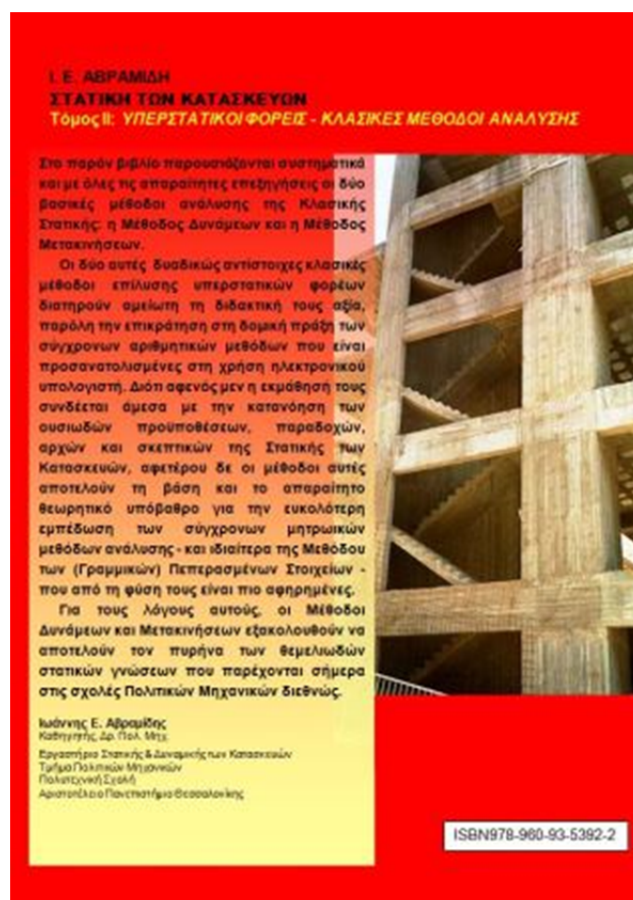


Στο βιβλίο αυτό αναπτύσσονται συστηματικά οι θεμελιώδεις αρχές της Στατικής των Κατασκευών και παρουσιάζεται με όλες τις απαραίτητες επεξηγήσεις η εφαρμογή τους για τον υπολογισμό ισοστατικών φορέων. Πιο συγκεκριμένα, μετά από μια συνοπτική ανασκόπηση της ιστορικής εξέλιξης της Στατικής, επεξηγούνται, αρχικά, οι βασικές παραδοχές και εξιδανικεύσεις, που οδηγούν στα γραμμικά προσομοιώματα (στατικά μοντέλα) των πραγματικών κατασκευών. Χάρην καλύτερης κατανόησης του σημαντικού για τη δομική πράξη προβλήματος της προσομοίωσης, γίνεται εκτεταμένη χρήση φωτογραφιών, με στόχο να δημιουργηθεί στον αναγνώστη, ήδη από τα πρώτα του βήματα στη Στατική των Κατασκευών, ένα σωστό αισθητήριο για τον τρόπο «σύλληψης» της πραγματικής μηχανικής συμπεριφοράς μιας κατασκευής, μέσω απλοποιημένων γραμμικών προσομοιωμάτων.

Κατόπιν, παρουσιάζονται οι θεμελιώδεις αρχές της Στατικής των Γραμμικών Φορέων, που αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη των μεθόδων επίλυσης, δηλαδή προσδιορισμού των μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης, όχι μόνο ισοστατικών, αλλά και υπερστατικών φορέων. Προς περαιτέρω εμπέδωση των μεθόδων επίλυσης, ακολουθεί η εφαρμογή τους σε μία σειρά χαρακτηριστικών τύπων, συχνά συναντώμενων στη δομική πράξη ισοστατικών φορέων. Και εδώ, οι διάφορες εφαρμογές συνοδεύονται από αρκετές φωτογραφίες, έτσι ώστε να αρχίσει να αναπτύσσεται στον αναγνώστη μια σωστή αίσθηση εγγύτητας των επιλυόμενων στατικών φορέων προς τις πραγματικές κατασκευές που αυτοί προσομοιώνουν.

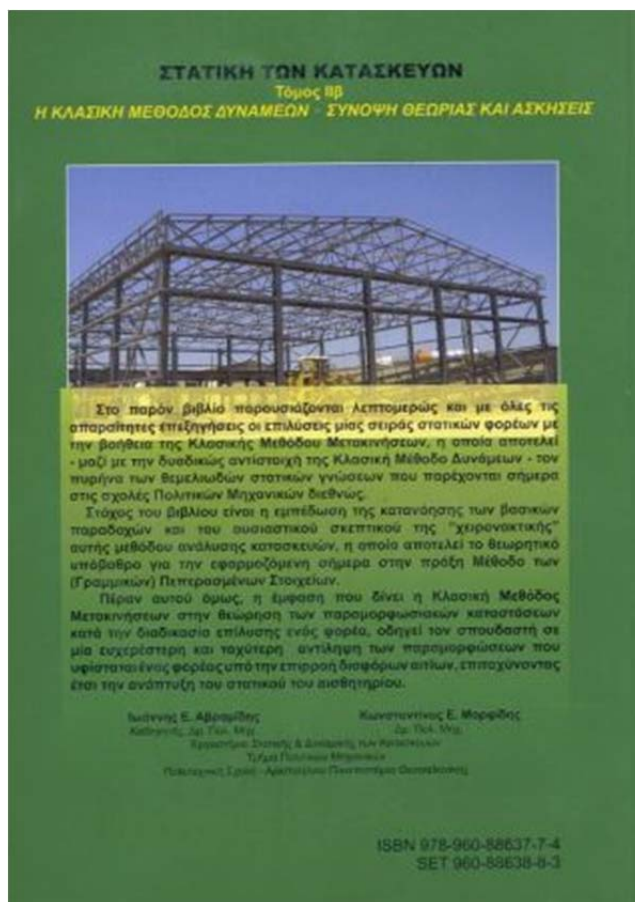
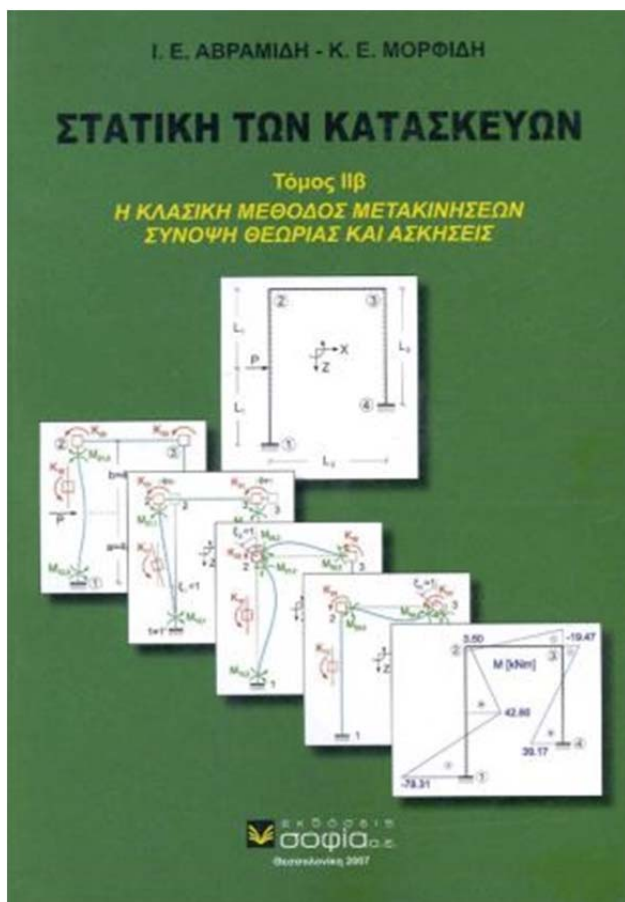
Η ανάπτυξη της ύλης γίνεται με τρόπο που αναδεικνύει με σαφήνεια την ενότητα και εσωτερική συνοχή της Στατικής των Κατασκευών, η οποία αποτελεί ένα *συνεκτικό θεωρητικό οικοδόμημα*, αξιωματικά θεμελιωμένο, με αλληλουχία μεθόδων και διαδικασιών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται προς τούτο, στην παρουσίαση και χρήση των εργαίων προτάσεων (αρχές των δυνατών και των συμπληρωματικών δυνατών έργων), η κατανόηση των οποίων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, όχι μόνο μέσα στο πλαίσιο της Κλασικής Στατικής, αλλά και για την, εν συνεχεία, μετάβαση στις σύγχρονες μητρικές μεθόδους, που εφαρμόζονται στη σημερινή δομική πράξη.

[2] Αβραμίδης, Ι.Ε. (2013). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος II: Υπερστατικοί Φορείς - Κλασικές Μέθοδοι Ανάλυσης*. Θεσσαλονίκη: Αυτοέκδοση.



Στο βιβλίο αυτό παρουσιάζονται, συστηματικά και με όλες τις απαραίτητες επεξηγήσεις, οι δύο βασικές μέθοδοι ανάλυσης της Κλασικής Στατικής: η Μέθοδος Δυνάμεων και η Μέθοδος Μετακινήσεων. Οι δύο αυτές δυαδικές αντίστοιχες κλασικές μέθοδοι επίλυσης υπερστατικών φορέων διατηρούν αμείωτη τη διδακτική τους αξία, παρ' όλη την επικράτηση στη δομική πράξη των σύγχρονων αριθμητικών μεθόδων, που είναι προσανατολισμένες στη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Διότι, αφενός μεν η εκμάθηση των κλασικών μεθόδων συνδέεται άμεσα με την κατανόηση των ουσιωδών προϋποθέσεων, παραδοχών, αρχών και σκεπτικών της Στατικής των Κατασκευών, αφετέρου δε οι μέθοδοι αυτές αποτελούν τη βάση και το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο για την ευκολότερη εμπέδωση των σύγχρονων μητρικών μεθόδων ανάλυσης - και ιδιαίτερα της Μεθόδου των (Γραμμικών) Πεπερασμένων Στοιχείων - , που από τη φύση τους είναι πιο μαθηματικοποιημένες και λιγότερο εποπτικές. Για τους λόγους αυτούς, οι Μέθοδοι Δυνάμεων και Μετακινήσεων εξακολουθούν να αποτελούν τον πυρήνα των θεμελιωδών στατικών γνώσεων που παρέχονται σήμερα στις σχολές Πολιτικών Μηχανικών διεθνώς.

[3] Αβραμίδης, Ι.Ε. & Μορφίδης, Κ.Ε. (2007). *Στατική των Κατασκευών, Τόμος ΙΙβ: Η κλασική μέθοδος των μετακινήσεων - Σύνοψη θεωρίας και ασκήσεις*. Θεσσαλονίκη: Σοφία.



Στόχος του τόμου ΙΙβ είναι να παρουσιαστούν, λεπτομερώς, και με όλες τις απαραίτητες εξηγήσεις, οι επιλύσεις μίας σειράς στατικών φορέων με τη βοήθεια των δύο κλασικών μεθόδων υπολογισμού δομικών κατασκευών: της Μεθόδου Δυνάμεων και της Μεθόδου Μετακινήσεων, οι οποίες αποτελούν τον πυρήνα των θεμελιωδών στατικών γνώσεων που παρέχονται σήμερα στις πολυτεχνικές σχολές Πολιτικών Μηχανικών διεθνώς. Στόχος του βιβλίου είναι η εμπέδωση της κατανόησης των βασικών παραδοχών και του ουσιαστικού σκεπτικού των «χειρωνακτικών» αυτών μεθόδων υπολογισμού, εκ των οποίων η δεύτερη αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο για τη, σχεδόν αποκλειστικά εφαρμοζόμενη σήμερα στην πράξη, Μέθοδο των (Γραμμικών) Πεπερασμένων Στοιχείων. Η επιλογή των ασκήσεων έγινε με γνώμονα την ευρύτερη δυνατή κάλυψη βασικών περιπτώσεων της δομικής πράξης και με σκοπό να οδηγήσει τον σπουδαστή ταχύτερα στην ανάπτυξη ενός ικανοποιητικού στατικού αισθητηρίου.
