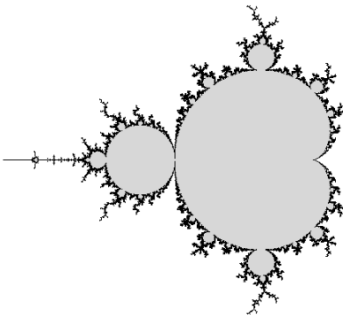
Τετραγωνικά πολυώνυμα

Το σύνολο Mandelbrot

Ευάγγελος Κοτζαφίλιος

Πολύ πρόχειρες σημειώσεις



Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Μαθηματικών 2023

Περιεχόμενα

1 Τετραγωνικά πολυώνυμα **5**
1.1 Βασικό θεώρημα διχοτόμησης 5
1.2 Σύνολο Mandelbrot 9
1.3 Το πολυώνυμο $p(z) = z^2 - 2$ 12
1.4 Χαρτογραφόντας το σύνολο Mandelbrot 13
1.5 Συνεκτικότητα 20
1.6 Διάσταση Hausdorff 24
1.7 Παράμετροι στο σύνορο 26
1.8 Σχόλια 29

Κεφάλαιο 1

Τετραγωνικά πολυώνυμα

1.1 Βασικο θεωρημα διχοτομησης

Από εδώ και στο εξής θα ασχοληθούμε με την δυναμική των συναρτήσεων

$$p_c(z) = z^2 + c, \qquad c \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Ας σημειώσουμε ότι κάθε τετραγωνικό πολυώνυμο μπορεί να έρθει σε αυτήν την μορφή έπειτα από μια αφινική αλλαγή μεταβλητής, έτσι η μελέτη τέτοιων απεικονίσεων (1.1) δεν μας περιορίζει καθόλου.

Παρόλο που πολυώνυμα της μορφής (1.1) είναι οι απλούστερες αναλυτικές συναρτήσεις τις οποίες μπορούμε να μελετήσουμε δυναμικά, ενώ η ποιοτική τους συμπεριφορά παραμένει πλούσια, μπορούν να παρουσιάσουν μια πλειάδα από φαινόμενα τα οποία από μια κλασική οπτική θα θεωρούνταν παθολογικά.

Επιπλέον φαίνεται πως η οικογένεια των απεικονίσεων (1.1) αποτελεί πολλές φορές μια καθολική οντότητα υπό διάφορα πρίσματα. Μερικές από αυτές τις περιπτώσεις αποτελούν το θεώρημα του Yoccoz στην ευθυγράμμιση άρρητα ουδέτερων σημείων, [20], το καθολικό θεώρημα του McMullen, [13] και η εικασία της υπερβολικότητας, [11]. Δεν θα ασχοληθούμε προφανώς με καμία από αυτές τις έννοιες.

Ουσιώδης στην μελέτη των τετραγωνικών πολυωνύμων αποτελεί ο τόπος συνεκτικότητας, connectedness locus, ένα σύνολο ευρύτερα γνωστό με την ονομασία "σύνολο Mandelbrot", μελέτη του οποίου θα πραγματοποιηθεί παρακάτω. Για να ορίσει κανείς όμως αυτό το σύνολο πρέπει να μελετήσει την γεωμετρία των συνόλων Julia, $\mathscr{J}(p_c)$.

Ας θυμηθούμε μερικά βασικά στοιχεία για τα τετραγωνικά πολυώνυμα. Το κρίσιμο σημείο $z = 0$ θα διαδραματίσει έναν άκρως σημαντικό ρόλο στην μελέτη μας, καθώς η δυναμική του θα καθορίσει την μορφή των συνόλων Julia. Επιπλέον, το σημείο $z = \infty$ αποτελέι ένα υπερελκιστικό σταθερό σημείο και έτσι $\infty \in \mathscr{J}$, ενώ το σύνολο Julia είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Κατά συνέπεια στο $z = \infty$ αντιστοιχεί ένα ανοικτό υποσύνολο της σφαίρας $\hat{\mathbb{C}}$

$$A_\infty = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : p_c^n(z) \to \infty\},$$

το οποίο ονομάζεται λεκάνη έλξης. Η άμεση λεκάνη έλξης A_∞^* ορίζεται ως η συνεκτική συνιστώσα του A_∞ που περιέχει το $z = \infty$.

Λήμμα 1 *Για κάθε (τετραγωνικό) πολυώνυμο ισχύει $A_\infty = A^*_\infty$. Επιπλέον η λεκάνη A^*_∞ είναι πλήρως αναλλοίωτη*[1] *και υπάρχει ανοικτός δίσκος D με κέντρο το $z = 0$ ώστε*

$$A_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} p_c^{-n}(\hat{\mathbb{C}} - \overline{D}) \tag{1.2}$$

και $p_c(\hat{\mathbb{C}} - \overline{D}) \subseteq \hat{\mathbb{C}} - \overline{D}$.

Απόδειξη.

Το μόνο που έχουμε να δείξουμε είναι ότι τα σύνολα $U_n = p_c^{-n}(\hat{\mathbb{C}} - \overline{D})$ είναι συνεκτικά. Πράγματι, αν το U_n είναι συνεκτικό ενώ το U_{n+1} όχι, μπορούμε να θεωρήσουμε μια φραγμένη συνιστώσα του[2]. Έστω V αυτή η συνιστώσα. Τότε από την υπόθεση μας η απεικόνιση $f : V \to U_n$ είναι "επί" και $\infty \in f(V)$. Έτσι η V πρέπει να περιέχει κάποιον πόλο, το οποίο είναι αδύνατον.
□

Η σχέση (1.2) φαίνεται αναμενώμενη καθώς το $z = \infty$ είναι ελκιστικό, στο μέλον όλα τα σημεία του A_∞ θα το πλησιάσουν. Έτσι κοιτώντας στις παρελθοντικές τροχίες κάθε σημείου μπορούμε να κατασκευάσουμε την λεκάνη A_∞. Ειδικότερα οι αντίστροφες εικόνες κάθε σημείου στην A_∞, με το πολύ μια εξάιρεση συσσωρεύονται στο σύνολο Julia.

Για το παρακάτω αποτέλεσμα θυμηθείτε ότι ένα ανοικτό, συνεκτικό σύνολο είναι απλά συνεκτικό στο επίπεδο αν και μόνον εάν το εσωτερικό κάθε καμπύλης Jordan βρίσκεται μέσα στο αρχικό σύνολο.

Θεώρημα 1 *Αν το κρίσιμο σημείο $z = 0$ δεν βρίσκεται στην λεκάνη A_∞ το σύνολο Julia, $\mathscr{J}(p_c)$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη.

Αρκεί να δείξουμε ότι η λεκάνη A_∞ είναι απλά συνεκτική. Το αποτέλεσμα θα προκύψει από την τοπολογία του επιπέδου[3]. Επιπλέον, αρκεί να δείξουμε πως κάθε $U_n = p_c^{-n}(\hat{\mathbb{C}} - \overline{D})$ είναι απλά συνεκτικό, καθώς όλα τα U_n έχουν μη κενή τομή. Θα το κάνουμε μόνο για το $V = p_c^{-1}(\hat{\mathbb{C}} - \overline{D})$.

Έστω μια καμπύλη Jordan $\gamma : [0, 1] \to V$. Σχηματίζουμε την εικόνα της $\Gamma = p_c \circ \gamma$ στο U. Δεν υπάρχουν t_1, t_2 διαφορετικά του 0 και του 1 ώστε

$$\Gamma(t_1) = \Gamma(t_2).$$

Πράγματι, αν υπήρχαν, τότε θα βρίσκαμε δύο διαφορετικά σημεία w_1, w_2 στην λεκάνη A_∞ ώστε $\zeta = p(w_1) = p(w_2)$. Κατά συνέπεια στο $z = \zeta$ το πολυώνυμο δεν έχει τοπική αντίστροφη και από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης το $z = \zeta$ είναι ένα κρίσιμο σημείο μέσα στην λεκάνη έλξης, το οποίο δεν μπορεί να συμβεί.

[1] Θυμηθείτε ότι ένα σύνολο U λέγεται πλήρως αναλλοίωτο υπό την f αν $f^{-1}(U) = U$.

[2] Η ύπαρξη αυτής της συνιστώσας είναι άμεση, καθώς το U_{n+1} έχει τουλάχιστον δυο, μια εκ των οποίων περιέχει το $z = \infty$.

[3] Στο επίπεδο ένα ανοικτό, συνεκτικό σύνολο είναι απλά συνεκτικό αν και μόνον εάν το σύνορο του είναι συνεκτικό

Κατά συνέπεια, η Γ είναι μια καμπύλη Jordan στο U, και το εσωτερικό της γ απεικονίζεται από το p_c στο εσωτερικό της Γ. Έτσι το εσωτερικό $\mathrm{int}(\gamma)$ είναι υποσύνολο του V και το τελευταίο είναι απλά συνεκτικό.
□

Θεώρημα 2 *Αν η τροχιά $p_c^n(0)$ του κρίσιμου σημείου τείνει στο άπειρο, το σύνολο Julia $\mathscr{J}(p_c)$ είναι ολικά ασυννεκτικό. Με άλλα λόγια όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι μονοσύνολα.*

Απόδειξη.

Έστω D ένας δίσκος πεπερασμένης ακτίνας με κέντρο το $z = 0$, με την ιδιότητα ότι περιέχει το σύνολο Julia και

$$p_c^{-1}(\mathbb{C} - \overline{D}) \subseteq \mathbb{C} - \overline{D}.$$

Εφόσον $p_c^n(0) \to \infty$, υπάρχει ένα ελάχιστο n ώστε $0 \in U_n$, όπου $U_n = p_c^{-n}(\mathbb{C} - \overline{D})$. Μπορούμε να επιλέξουμε την ακτίνα του D ώστε το $z = 0$ να μην βρίσκεται στο σύνορο ∂D. Συνεπώς, αυτό δεν μπορεί να βρίσκεται και στο σύνορο ∂U_{n-1}[4] και ένα επιχείρημα όμοιο με αυτό της απόδειξης του Θεωρήματος 1 μας λέει ότι το ∂U_{n-1} είναι μια καμπύλη Jordan.

Έστω τώρα ο τοπολογικός δίσκος $V = \hat{\mathbb{C}} - \overline{U_{n-1}}$. Με βάση αυτόν θα κατασκευάσουμε το σύνολο Julia.

Εφόσον το $z = 0$ δεν βρίσκεται στον V, η αντίστροφη εικόνα $p_c^{-1}(V) = V_0^1 \cup V_1^1$ αποτελείται από δύο ξένους τοπολογικούς δίσκους, των οποίων οι κλειστές θήκες περιέχονται ως συμπαγή σύνολα στον V και η $p_c|_{V_i^1}$ είναι σύμμορφη επί του V. Με άλλα λόγια $V_i^1 \Subset V$.

Παίρνουμε ξανά την αντίστροφη εικόνα της ένωσης $V_0^1 \cup V_1^1$ μια φορά εντός του V_0^1 μια φορά εντός του V_1^1. Έτσι καταλήγουμε με 4 ξένους τοπολογικούς δίσκους

$$p_c^{-1}(V_0^1 \cup V_1^1) = V_{00}^2 \cup V_{01}^2 \cup V_{10}^2 \cup V_{11}^2,$$

με ιδιότητες όπως παραπάνω.

Συνεχίζοντας έτσι βλέπουμε πως τα σύνολα $p_c^{-n}(V)$ αποτελούνται από 2^n ξένους μεταξύ τους τοπολογικούς δίσκους με σύνορα καμπύλες Jordan, $V_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}^n$ ώστε

$$V_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}^n \Subset V_{i_1 i_2 \ldots i_{n-2}}^{n-1}$$

και κάθε απεικόνιση $p_c|_{V_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}^n}$ είναι σύμμορφη με εικόνα το $V_{i_1 i_2 \ldots i_{n-2}}^{n-1}$.

Εφόσον η κλειστή θήκη της πρώτης ένωσης βρισκόταν ως συμπαγές σύνολο στον V, βλέπουμε ότι η οικογένεια $\{p_c^{-n}|_V\}$ είναι κανονική. Εφόσον όμως για κάθε $z \in V \cap A_\infty$ τα σύνολα $p_c^{-n}(\{z\})$ συσσωρεύονται στο σύνολο Julia, βλέπουμε πως κάθε όριο της κανονικής οικογένειας

$$g : V \cap A_\infty \to \mathscr{J}(p_c)$$

[4] Τα πολυώνυμα απεικονίζουν σύνορα σε σύνορα. Με άλλα λόγια αν $p : U \to V$, τότε $p(\partial U) = \partial V$.

είναι μια σταθερή συνάρτηση, γιατί το σύνολο Julia δεν περιέχει ανοικτά σύνολα. Αυτό σημαίνει ότι η Ευκλείδεια διάμετρος $\mathrm{diam}(V^n_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}) \to 0$. Επιπλέον, η τομή

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} p_c^{-n}(V) = \hat{\mathbb{C}} - A_\infty \tag{1.3}$$

είναι ένα ολικά ασυννεκτικό σύνολο, ενώ αυτή η ισότητα προκύπτει από την (1.2). Συνεπώς το σύνολο Julia είναι ίσο με την τομή (1.3) και κατ΄ επέκταση ολικά ασυννεκτικό.
□

Σε αυτό το σημείο θα έπρεπε να ανφερθούμε σε ένα θεώρημα της γενικής τοπολογίας. Η απόδειξη του μπορεί να βρεθεί σε αρκετά βιβλία τοπολογίας, αλλά ας αναφέρουμε ενδεικτικά ως παραπομπή το [10], Θεώρημα 7.8.

Θεώρημα 3 *(Brouwer's universality theorem) Έστω ένας μη κενός μετρικός χώρος X. Αυτός είναι ομοιόμορφος με το σύνηθες σύνολο Cantor αν και μόνον εάν είναι συμπαγής, τέλειος και ολικά ασυννεκτικός.*

Θα αναφερόμαστε σε οποιονδήποτε χώρο ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 3 απλά ως σύνολο Cantor, χωρίς να κάνουμε οποιαδήποτε αναφορά σε κάποιον ομοιομορφισμό. Σύμφωνα με αυτή τη σύμβαση έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4 *(Fatou-Julia) Το σύνολο Julia ενώς τετραγωνικού πολυωνύμου είναι είτε συνεκτικό ή Cantor. Η τελευταία περίπτωση προκύπτει αν και μόνον εάν $p_c^n(0) \to \infty$.*

Απόδειξη.
Η απόδειξη είναι άμεση από τον συνδυασμό των Θεωρημάτων 1, 2, 3 και το γεγονός ότι το σύνολο Julia πολυωνύμων είναι συμπαγές και τέλειο.
□

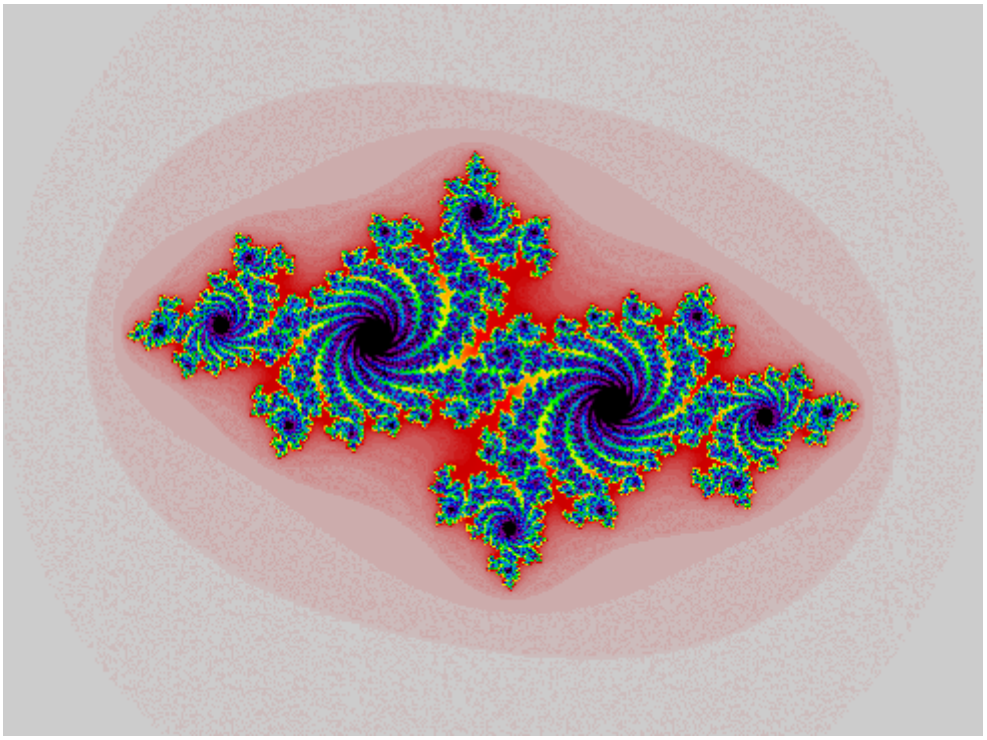
Γενικό σχόλιο
Η απόδειξη του Θεωρήματος 1 θα μπορούσε να γίνει πολύ πιο γρήγορα, αλλά με χρήση πολύ πιο εκλεπτυσμένων μεθόδων.

Θεωρούμε την απεικόνιση $p_c : U_{n+1} \to U_n$ ως διπλή απεικόνιση κάλυψης, έχοντας υπ΄όψιν ότι κάθε τετραγωνικό πολυώνυμο είναι proper mapping. Αν τώρα c_{n+1} και c_n είναι οι συνκτικότητες των U_{n+1}, U_n αντίστοιχα, από το θεώρημα των Riemann-Hurwitz

$$c_{n+1} - 2 = 2(c_n - 2) + 1.$$

Αν υποθέσουμε ότι το U_n είναι απλά συνεκτικό, $c_n = 1$ και βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το U_{n+1}.

Επιπλέον, από την απόδειξη του Θεωρήματος 2 φαίνεται πως όταν το σύνολο Julia είναι ολικά ασυννεκτικό και έτσι Cantor, το πολυώνυμο έχει μόνο έναν ελκιστικό περιοδικό κύκλο, το σταθερό σημείο στο $z = \infty$. Στην περίπτωση που δεν είναι



Σχήμα 1.1: Το σύνολο Julia του πολυωνύμου $p(z) = z^2 + (-0.7 + 0.27015i)$. Είναι ένα σύνολο Cantor.

σύνολο Cantor μπορεί να έχει το πολύ ακόμη έναν ελκιστικό κύκλο που δίνεται από τις αναδρομές ενός πεπερασμένου σημείου.

Αν στην απόδειξη κάναμε χρήση της υπερβολικής μετρικής θα βλέπαμε ότι η σύγκλιση των σημείων του $p_c^{-n}(V)$ στα σημεία του συνόλου Julia γίνεται με εκθετικό ρυθμό. Έτσι η απόδειξη του Θεωρήματος 2 δίνει έναν καλό αλγόριθμο για την κατασκευή εικόνων συνόλων Julia.

Το τελευταίο μάλιστα δείχνει ότι το πολυώνυμο επεκτείνεται πανω στο σύνολο Julia του, υπό την έννοια ότι η υπερβολική παράγωγος του περιορισμένη εκεί είναι ομοιόμορφα φραγμένη πάνω από το ένα.

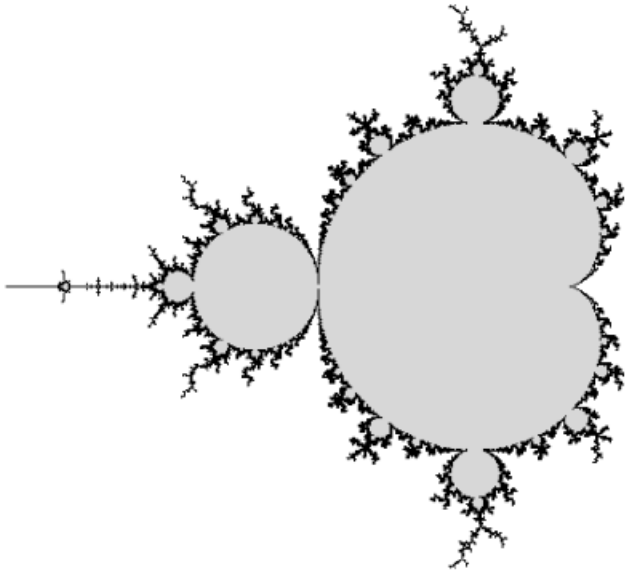
1.2 Σύνολο Mandelbrot

Από εδώ και πέρα θα ασχοληθούμε με τον τόπο συνεκτικότητας των πολυωνύμων $p_c(z) = z^2 + c$. Ορίζουμε το σύνολο Mandelbrot $\mathscr{M}$ ως

$$\mathscr{M} = \{c \in \mathbb{C} : \text{το σύνολο } \mathscr{J}(p_c) \text{ είναι συνεκτικό}\}$$

Ισοδύναμα σύμφωνα με το Θεώρημα 4 μπορούμε να περιγράψουμε το σύνολο Mandelbrot ως το σύνολο όλων εκείνων των παραμέτρων c ώστε η ακολουθία $\{p_c^n(0)\}$ να είναι φραγμένη.

Ας γίνει ξεκάθαρο πως πλέον το σύνολο αυτό βρίσκεται στο παραμετρικό και όχι στο δυναμικό επίπεδο. Αυτό σημαίνει πως το $\mathscr{M}$ περιγράφει ταυτόχρονα την δυναμική όλων των τετραγωνικών πολυωνύμων με συνεκτικό σύνολο Julia. Επιπλέον,



Σχήμα 1.2: Το σύνολο Mandelbrot.

κατά πάσα πιθανότητα δεν είναι το σύνολο Julia κάποιου πολυωνύμου, (αν και είναι κάποιας μερόμορφης συνάρτησης). Παρόλάυτά, το εσωτερικό του αποτελεί μέρος ενός συνόλου στο οποίο μια πολύ συγκεκριμένη ακολουθία πολυωνύμων αποτελεί κανονική οικογένεια, (δείτε παρακάτω). Ορίζουμε $v_0(c) = 0$ και αναδρομικά

$$v_{n+1}(c) = v_n(c)^2 + c, \qquad n \geq 0 \tag{1.4}$$

την ακολουθία που παράγεται από την τροχιά της κρίσιμης τιμής μέσω του p_c

$$0 \mapsto c \mapsto c^2 + c \mapsto (c^2 + c)^2 + c \mapsto \dots$$

Παρόλο που η πρώτη εντύπωση που αφήνει το σύνολο Mandelbrot είναι μέσω του κύριου καρδιοειδούς, με την οξεία του γωνία στο $z = \frac{1}{4}$, κάθε ένα μικρότερο τέτοιο έχει την δικιά του ερμηνεία.

Θεώρημα 5 *Τα παρακάτω ισχύουν για το σύνολο $\mathscr{M}$*

i) Αν υπάρχει $n > 0$ ώστε $|v_n(c)| > 2$, τότε $v_n(c) \to \infty$ και το $\mathscr{M}$ είναι υποσύνολο του κλειστού δίσκου με κέντρο στο $z = 0$ και ακτίνα ίση με δύο.

ii) $v_n(c) \to \infty$ τοπικά ομοιόμορφα για $c \in \mathbb{C} - \mathscr{M}$. Έτσι το $\mathscr{M}$ είναι συμπαγές.

iii) Το συμπλήρωμα $\mathbb{C} - \mathscr{M}$ είναι συνεκτικό. Έτσι, κάθε συνιστώσα του $\mathscr{M}$ είναι απλά συνεκτική.

iv) Η ακολουθία $\{v_n\}$ αποτελεί μια κανονική οικογένεια στο $\mathbb{C} - \partial\mathscr{M}$.

Απόδειξη.

Για το πρώτο, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι

$$|v_n(c)| \geq |c|(|c|-1)^{2^{n-1}}$$

από επαγωγή. Έτσι υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $m \geq 1$ ώστε $|v_m(c)| > 2$. Αν $|c| > 2$ από την παραπάνω σχέση προκύπτει αμέσως ότι η ακολουθία v_n απειρίζεται και $c \notin \mathscr{M}$. Από αυτό έχουμε ότι το $\mathscr{M}$ είναι υποσύνολο του κύκλου με κέντρο το μηδέν και ακτίνα δύο. Αν $|c| \leq 2$, γράφουμε $|v_m(c)| = 2+\varepsilon > 2$. Τότε $|v_{m+1}(c)| \geq (2+\varepsilon)^2 - 2 \geq 2 + 4\varepsilon$. Επαγωγικά

$$|v_{n+m}(c)| \geq 2 + 4^n\varepsilon,$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο.

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από τον ορισμό του συνόλου Mandelbrot και το Θεώρημα 4. Για να δείξουμε συμπάγεια, παρατηρούμε ότι το $\mathscr{M}$ αποτελείται από όλες εκείνες τις παραμέτρους c ώστε $|v_n(c)| \leq 2$, οπότε είναι κλειστό και φραγμένο από το προηγούμενο αποτέλεσμα.

Για τον τρίτο ισχυρισμό, η απεικόνιση $c \mapsto v_n(c)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$. Έτσι, αν το συμπλήρωμα $\mathbb{C} - \mathscr{M}$ είχε φραγμένες συνιστώσες, οι v_n θα έπρεπε να είναι φραγμένες στις κλειστές θήκες τους, άρα και στο εσωτερικό τους από την αρχή μεγίστου. Πράγμα που αντιβαίνει τον ορισμό του $\mathscr{M}$. Έτσι το $\mathbb{C} - \mathscr{M}$ είναι συνεκτικό.

Για το τελευταίο, βλέπουμε ότι αν $c \in \operatorname{int}(\mathscr{M})$, η ακολουθία $v_n(c)$ είναι φραγμένη, άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Αν $c \in \mathbb{C} - \mathscr{M}$ η $v_n(c)$ συγκλίνει στο άπειρο.
□

Πόρισμα 1 *Το σύνολο Mandelbrot μπορεί να περιγραφεί ως*

$$\mathscr{M} = \{c \in \mathbb{C} : |v_n(c)| \leq 2, \textit{για όλα τα } n\}.$$

Ο ισχυρισμός ότι το $\mathscr{M}$ βρίσκεται μέσα στον δίσκο με κέντρο το μηδέν και ακτίνα δύο είναι ο βέλτιστος δυνατός, καθώς το πολυώνυμο $p(z) = z^2 - 2$ έχει ως σύνολο Julia το ευθύγραμμο τμήμα $[-2, 2]$.

Πόρισμα 2 *Η τομή του $\mathscr{M}$ με τον πραγματικό άξονα είναι το ευθύγραμμο τμήμα* $\left[-2, \frac{1}{4}\right]$.

Απόδειξη.

Ας παρατηρήσουμε ότι για $c > \frac{1}{4}$ και $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 + c > |x|.$$

Έτσι για κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ υπάρχει μια σταθερά $\sigma > 1$ ώστε $x^2 + c > \sigma|x|$ και κατά συνέπεια $v_n(c) > \sigma^{n-1}|c|$ και βλέπουμε πως $c \in \mathbb{C} - \mathscr{M}$. Ότι $c \geq -2$ έπεται από το Θεώρημα 5, όμως πρέπει να ελέγξουμε και την περίπτωση $-2 \leq c < \frac{1}{4}$.

Μέσα σε αυτό το εύρος το πολυώνυμο $p_c(z) = z^2 + c$ έχει δύο πραγματικές ρίζες. Ας επιλέξουμε την μεγαλύτερη απ΄ αυτές

$$r = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c}.$$

Είναι φανερό τότε ότι $|c| \leq r$. Υποθέτοντας ότι $|v_n(c)| \leq r$ έχουμε επαγωγικά

$$\begin{aligned} |v_{n+1}(c)| &= |v_n^2(c) + c| \\ &\leq r^2 + |c| \\ &= r. \end{aligned}$$

Εφόσον η ακολουθία $v_n(c)$ είναι φραγμένη έχουμε το ζητούμενο.
□

Στην περίπτωση όπου οι παράμετροι c είναι πραγματικοί αριθμοί μπορούμε να δώσουμε μια πλήρη κατηγοριοποίηση της συμπεριφοράς των συνόλων Julia, $\mathscr{J}(p_c)$, [2], Θεώρημα 12.1.

Θεώρημα 6 *Έστω $c \in \mathbb{R}$ τότε*

i) Αν $-2 \leq c \leq \frac{1}{4}$ το σύνολο Julia, $\mathscr{J}(p_c)$ είναι συνεκτικό. Επιπλέον, αν $-\frac{3}{4} \leq c \leq \frac{1}{4}$ το $\mathscr{J}(p_c)$ είναι μια καμπύλη Jordan.

ii) Αν $c > \frac{1}{4}$ το $\mathscr{J}(p_c)$ είναι ένα σύνολο Cantor με μηδενικό δισδιάστατο μέτρο Lebesgue.

iii) Αν $c < -2$ το $\mathscr{J}(p_c)$ βρίσκεται εξ' ολοκλήρου μέσα στο διάστημα $[c, -c]$ και έχει μηδενικό μονοδιάστατο μέτρο Lebesgue.

1.3 Το πολυωνυμο $p(z) = z^2 - 2$

Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε ότι το σύνολο Julia του πολυωνύμου $p(z) = z^2 - 2$ είναι το διάστημα $[-2, 2]$.

Προφανώς για να γίνει κάτι τέτοιο θα χρειαστεί να εφαρμόσουμε ένα κόλπο! Έστω η απεικόνιση Joukowski

$$\phi(z) = z + \frac{1}{z}, \qquad |z| > 1.$$

Αυτή η απεικόνιση είναι ένα-προς-ένα στον δίσκο $|z| > 1$ γύρω από το άπειρο και τον απεικονίζει σύμμορφα επί του $\hat{\mathbb{C}} - [-2, 2]$.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} p(\phi(z)) &= z^2 + \frac{1}{z^2} \\ &= \phi(z^2). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Γράφοντας την ίδια εξίσωση με άλλο τρόπο, οι δυναμικές ιδιότητες γίνονται πιο ξεκάθαρες

$$\phi^{-1} \circ p \circ \phi(z) = z^2,$$

και παίρνοντας αναδρομές $\phi^{-1} \circ p^n \circ \phi(z) = z^{2^n}$, για $|z| > 1$. Είναι φανερό ότι η $\{p^n\}_{n\geq 1}$ είναι κανονική στο $\zeta = \phi(z_0)$ αν και μόνον εάν η οικογένεια συναρτήσεων $g_n(z) = \phi(z^{2^n})$ είναι κανονική στο $z = z_0$. Αυτό είναι φανερό, καθώς

$$|\phi(z^{2^n})| \geq |z|^{2^n} - \frac{1}{|z|^{2^n}} \to \infty$$

αν $z \in K$, συμπαγές υποσύνολο του $|z| > 1$.

Εξετάζοντας την περίπτωση όπου $|z| = 1$ στην εξίσωση (1.5) προκύπτει ότι το σύνολο Julia του p είναι το διάστημα $[-2, 2]$.

1.4 Χαρτογραφοντας το συνολο Mandelbrot

Ορισμός 1 *Ένα τετραγωνικό πολυώνυμο θα λέγεται υπερβολικό αν το πεπερασμένο κρίσιμο σημείο του $z = 0$ απορροφάται από έναν ελκιστικό κύκλο. Οι παράμετροι c για τις οποίες συμβαίνει αυτό θα ονομάζονται υπερβολικές.*

Από ένα θεώρημα των Fatou-Julia σε κάθε λεκάνη έλξης ενώς ελκιστικού κύκλου υπάρχει ένα κρίσιμο σημείο του πολυωνύμου το οποίο έλκεται προς τον αντίστοιχο περιοδικό κύκλο. Με άλλα λόγια, ο ορισμός ικανοποιείται σε περίπτωση που το πολυώνυμο p_c έχει έναν ελκιστικό κύκλο $\{\zeta, p_c(\zeta), \ldots, p_c^{k-1}(\zeta)\}$ που αντιστοιχεί στο πεπερασμένο περιοδικό σημείο $z = \zeta$.

Ο ορισμός είναι ανάλογος του ορισμού για τις Axiom A απεικονίσεις του Smale, [18].

Προφανώς σε περίπτωση που ένα πολυώνυμο είναι υπερβολικό, η παράμετρος c βρίσκεται στο σύνολο Mandelbrot. Έτσι μπορούμε να περιγράψουμε διάφορα υποσύνολα του $\mathscr{M}$ προσδιορίζοντας υπερβολικές παραμέτρους. Για παράδειγμα, ας βρούμε όλες τις c ώστε το p_c να έχει ένα ελκιστικό σταθερό σημείο με πολλαπλασιαστή $|\lambda| < 1$. Τότε

$$z_c^2 + c = z_c, \qquad \lambda = 2z_c$$

και βλέπουμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι το

$$\heartsuit = \left\{ \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4} : |\lambda| < 1 \right\}, \tag{1.6}$$

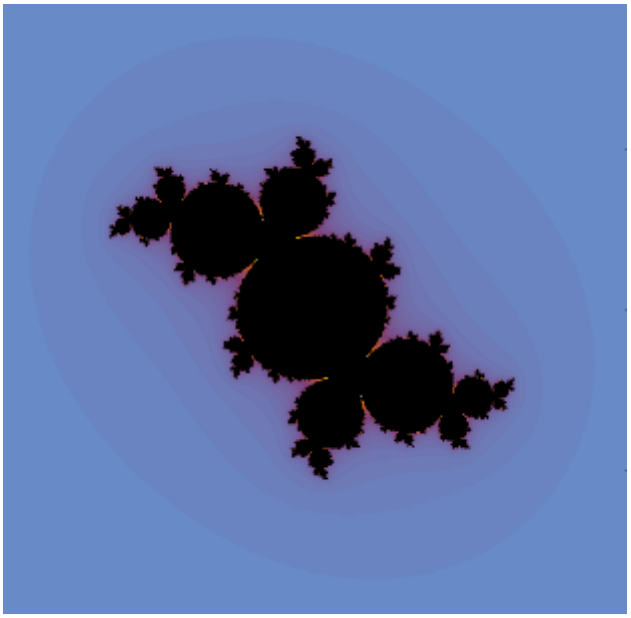
που αντιστοιχεί στο κύριο καρδιοειδές του Σχήματος 1.2.

Ας παρατηρήσουμε ότι το σύνορο $\partial\heartsuit$ αποτελείται από παραμέτρους για τις οποίες το πολυώνυμο έχει ουδέτρα σταθερά σημεία. Συγκεκριμένα, η εικόνα του κύκλου $\lambda = e^{2\pi i\theta}$ μέσω της απεικόνισης

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda^2}{4}$$

παράγει τέτοια. Με άλλα λόγια, αν επιλέξουμε την παράμετρο

$$c(\theta) = \frac{e^{2\pi i\theta}}{2} - \frac{e^{4\pi i\theta}}{4}, \qquad \theta \in [0, 1) \tag{1.7}$$



Σχήμα 1.3: Το σύνολο Julia, (περίγραμμα), του τετραγωνικού πολυωνύμου με $\theta = 1/3$ στην (1.7). Εδώ παρατηρούνται παραβολικά πέταλα.

το p_c θα έχει ένα σταθερό ουδέτερο σημείο.

Μπορούμε να εργαστούμε παρόμοια με παραπάνω ώστε να πάρουμε έναν ελκιστικό κύκλο, ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα περιοδικό σημείο με περίοδο δύο και πολλαπλασιαστή λ. Τότε

$$(z_c^2 + c)^2 + c = z_c, \qquad \lambda = 4z_c^3 + 4z_c c$$

και πρέπει να επιβάλουμε μια τρίτη συνθήκη $p_c(z_c) - z_c \neq 0$ ώστε ο κύκλος να μην προκύπτει τετριμμένα ως εικόνα ενός σταθερού σημείου. Η συνθήκη πιο πάνω γράφεται

$$z_c^2 - z_c + c \neq 0.$$

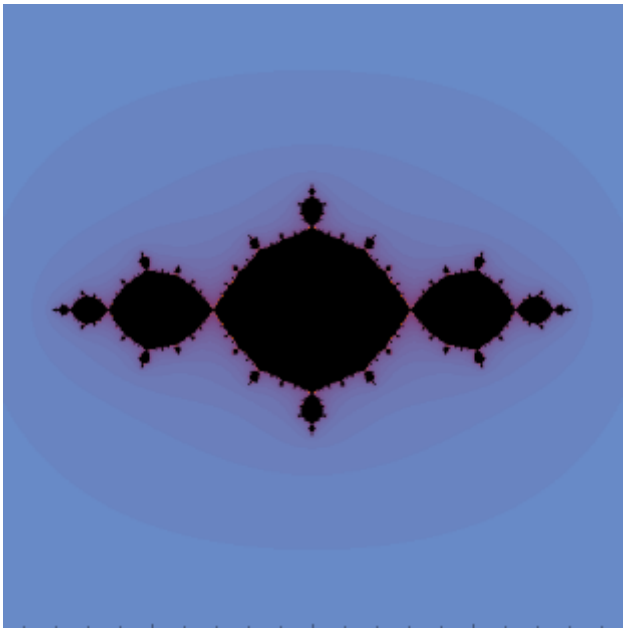
Βλέπουμε ότι

$$(z_c^2 + c)^2 + c - z_c = (z_c^2 - z_c + c)(z_c^2 + z_c + c + 1)$$

και τα σημεία του κύκλου $\{\zeta, z_c\}$ είναι οι ρίζες του $z^2 + z + c + 1 = 0$. Συγκεκριμένα από τους τύπους του Vieta $\zeta \cdot z_c = c + 1$. Επιπλέον ο πολλαπλασιαστής λ δίνεται ως $(p_c^2)'(z_c) = p_c'(\zeta)p_c'(z_c) = 4\zeta \cdot z_c$. Κατά συνέπεια το p_c έχει έναν ελκιστικό κύκλο περιόδου δύο αν και μόνον εάν $|c + 1| < \frac{1}{4}$, ήτοι αν και μόνον εάν η παράμετρος βρίσκεται στον ανοικτό κυκλικό δίσκο κέντρου $z = -1$ και ακτίνας $\frac{1}{4}$. Είναι ο δίσκος που εμφανίζεται στο Σχήμα 1.2 ακριβώς αριστερά από το καρδιοειδές ♡ και εφάπτεται σε αυτό.

Παρατηρήστε ότι και πάλι πάνω στον κύκλο $|c+1| = \frac{1}{4}$ βρίσκονται ουδέτερα περιοδικά σημεία με περιόδο δύο.

Αυτού του είδους οι ιδιότητες μπορούν να περιγραφούν από ένα γενικό θεώρημα, το οποίο για να αποδείξουμε θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα.



Σχήμα 1.4: Το σύνολο Julia, (περίγραμμα), του τετραγωνικού πολυωνύμου $p(z) = z^2 - 1$. Το σημείο $z = 0$ είναι περιοδικό σημείο με περίοδο δύο, ενώ το σύνολο Julia είναι γνωστό με το όνομα Basilica.

Λήμμα 2 *(Ευστάθεια κύκλων) Έστω μια σταθερή παράμετρος $c = c_0$ και $p_{c_0} = p_0$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι το σύνολο $\{\zeta_k\}_{k=0}^{m-1}$ είναι ένας κύκλος του p_0 περιόδου m και με πολλαπλασιαστή $\lambda \neq 1$. Τότε, για μια γειτονιά γύρω από το $c = c_0$ οι απεικονίσεις p_c έχουν έναν κύκλο $\{\zeta_k(c)\}_{k=1}^{m-1}$ που εξαρτάται ολόμορφα από την παράμετρο c. Το ίδιο ισχύει και για τον αντίστοιχο πολλαπλασιαστή $\lambda = \lambda(c)$.*

Απόδειξη.

Έστω η αλγεβρική μορφή $F(z, c) = p_c^m(z) - z$, η οποία είναι ολόμορφη ως προς τις δύο μεταβλητές της. Για $c = c_0$, έχουμε ρίζες τις εξίσωσης $F(z, c_0) = 0$ τουλάχιστον τα σημεία του κύκλου $z = \zeta_k$, $0 \leq k \leq m - 1$. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\left.\frac{\partial F(z, c_0)}{\partial z}\right|_{z=\zeta_k} = \lambda - 1 \neq 0$$

Από το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων παίρνουμε το πρώτο αποτέλεσμα. Για τον πολλαπλασιαστή, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\lambda(c) = 2^m \prod_{k=0}^{m-1} \zeta_k(c).$$

□

Θεώρημα 7 *Υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $p_0 = p_{c_0}$ έχει έναν ελκιστικό κύκλο μήκους m. Τότε, αν το $c_0 \in \mathrm{int}(M)$ και για κάθε $c \in U$, την συνεκτική συνιστώσα του εσωτερικού του $\mathscr{M}$ που περιέχει το $c = c_0$, το πολυώνυμο p_c έχει έναν ελκιστικό κύκλο $\{\zeta_k(c)\}_{k=0}^{m-1}$ με τις απεικονείσεις $c \mapsto \zeta_k(c)$ να είναι ολόμορφες.*

Απόδειξη.

Έστω μια υπερβολική παράμετρος $c = c_0$ και H η συνεκτική συνιστώσα του $\mathrm{int}(M)$ που την περιέχει. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι κάθε παράμετρος στην H είναι υπερβολική.

Εφόσον η $c = c_0$ είναι υπερβολική, υπάρχει ένας ελκιστικός κύκλος περιόδου m και ένα σημείο του ζ_0, ώστε

$$v_{nm}(c_0) = p_0^{nm}(0) \to \zeta_0.$$

Από το Λήμμα 2 για c κοντά στην $c = c_0$ τα πολυώνυμα p_c έχουν ελκιστικούς κύκλους που απορροφούν τις εικόνες του κρίσιμου σημείου. Λόγω κανονικότητας της $\{v_{nm}\}$ και ολομορφικής εξάρτησης των κύκλων από το Λήμμα 2, έχουμε ότι

$$v_{nm}(c) \to \zeta_0(c),$$

σε μια ανοικτή περιοχή γύρω από το $c = c_0$, όπου η $\zeta_0(c)$ εξαρτάται ολόμορφα από το c.

Από το Θεώρημα 5 η οικογένεια $\{v_{nm}\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο H. Έτσι από το θεώρημα των Vitali-Porter[5] η $\{v_{nm}\}$ συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα σε μια ολόμορφη συνάρτηση $f = f(c)$ η οποία συμπίπτει με την $\zeta_0(c)$ σε μια περιοχή κοντά στην παράμετρο $c = c_0$.

Εφόσον τα σημεία $z = \zeta_0(c)$ είναι περιοδικά σημεία και η f αποτελεί μια αναλυτική τους επέκταση, πρέπει κι αυτή να είναι περιοδικό σημείο. Αυτό φαίνεται από την σχέση

$$p_c^m(\zeta_0(c)) = \zeta_0(c).$$

Συγκεκριμένα βλέπουμε ότι η f αποτελεί περιοδικό σημείο με περιόδο m. Αυτό συμβαίνει γιατί προφανώς το σύνολο των παραμέτρων c, όπου ένα περιοδικός κύκλος έχει μια συγκεκριμένη περίοδο είναι ανοικτό από το Λήμμα 2. Έτσι η περίοδος είναι σταθερή σε κάθε συνεκτική συνιστώσα.

Η f δεν μπορεί να είναι αποθητικό περιοδικό σημείο, καθώς δεν μπορεί να έλκει σημεία, εκτός αν αυτά πέφτουν ακριβώς μέσα στον αποθητικό κύκλο. Τέλος, εφόσον ο πολλαπλασιαστής του νέου κύκλου είναι μια ολόμορφη συνάρτηση του c, από το Λήμμα 2, βλέπουμε ότι η περίπτωση των ουδέτερων κύκλων δεν μπορεί να προκύψει και έτσι έχουμε το ζητούμενο.

□

Πόρισμα 3 *Οι παράμετροι c που γεννούν ουδέτερα περιοδικά σημεία βρίσκονται στο σύνορο $\partial\mathscr{M}$.*

Το Θεώρημα 7 αναφέρει πως όλες οι υπερβολικές παράμετροι απαρτίζουν ένα σύνολο το οποίο αποτελείται από την συνεκτική συνιστώσα $\mathbb{C} - \mathscr{M}$ και κάποιες συνεκτικές συνιστώσες του $\mathrm{int}(\mathscr{M})$. Με βάση αυτή την παρατήρηση, η επόμενη εικασία στέκει άλυτη κιόλας από τον καιρό του Fatou.

[5] Αυτό το θεώρημα αναφέρει πως αν μια ακολουθία $\{f_n\}$ ολόμορφων συναρτήσεων στο U είναι τοπικά ομοιόμορφα φραγμένη και το όριο $\lim f_n(z)$ υπάρχει σε ένα σύνολο $V \subseteq U$ που περιέχει ένα σημείο συσσώρευσης, τότε η ακολουθία συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο U. Δείτε [16].

Εικασία της Υπερβολικότητας

Όλες οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathrm{int}(\mathscr{M})$ *είναι υπερβολικές. Υπερβολικές παράμετροι είναι πυκνές στο* $\mathbb{C}$.

Προχωρώντας, ας σημειώσουμε ότι το τετραγωνικό πουλυώνυμο $p_c(z) = z^2 + c$ μπορεί να έχει το πολύ έναν (υπερ)ελκιστικό κύκλο, πέρα από το σταθερό σημείο στο άπειρο. Σε περίπτωση που αυτό είναι αυστηρά υπερελκιστικό, αναγκαστικά το $z = 0$ βρίσκεται μέσα στον κύκλο. Αυτό προκύπτει από την συνθήκη $p_c'(z_0) = 0$.

Θεώρημα 8 *Οι παράμετροι* c *ώστε το πολυώνυμο* p_c *έχει έναν υπερλκιστικό κύκλο* $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1}\}$ *συσσωρεύονται στο σύνορο* $\partial\mathscr{M}$.

Απόδειξη.

Έστω U ένας ανοικτός δίσκος γύρω από ένα σημείο στο σύνορο $\partial\mathscr{M}$, ώστε το σημείο $c = 0$ να μην περιέχεται σ' αυτόν. Επιπλέον για να φτάσουμε σε άτοπο υποθέτουμε πως το $z = 0$ δεν είναι περιοδικό για καμία τιμή του $c \in U$, (δείτε την παράγραφο πριν το θεώρημα).

Έστω ένας ολόμορφος, μη μηδενικός κλάδος της ρίζας $\sqrt{-c}$ ορισμένος στον U. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει αριθμός $n \geq 1$ ώστε $p_c^n(0) = \sqrt{-c}$, αλλιώς θα είχαμε $p_c^{n+1}(0) = 0$ που υποθέσαμε ότι δεν ισχύει.

Ορίζουμε τις ολόμορφες συναρτήσεις $P_n : U \to \mathbb{C}$ με

$$P_n(c) = \frac{p_c^n(0)}{\sqrt{-c}}.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε n οι P_n έχουν εικόνα στο σύνολο $\hat{\mathbb{C}} - \{0, 1, \infty\}$. Έτσι, από το θεώρημα του Montel η οικογένεια $\{P_n\}$ είναι κανονική στο U και αυτό είναι αδύνατο γιατί ο δίσκος U έχει τομή με παραμέτρους για τις οποίες η P_n μένει φραγμένη, αλλά και απειρίζεται.

□

Πόρισμα 4 *Το εσωτερικό του συνόλου Mandelbrot,* $\mathrm{int}(\mathscr{M})$ *είναι πυκνό στο* $\mathscr{M}$.

Απόδειξη.

Αρκεί να αποδειχθεί ότι κάθε σημείο του συνόρου $\partial\mathscr{M}$ προσεγγίζεται από σημεία του εσωτερικού $\mathrm{int}(\mathscr{M})$. Αυτός ο ισχυρισμός είναι απλά ο συνδυασμός των Θεωρημάτων 7 και 8.

□

Γενικά σχόλια

Η υπερβολικότητα παίζει έναν πολύ συμαντικό ρόλο στην μελέτη της δυναμικής γενικών ρητών, ακεραίων ή και μερόμορφων συναρτήσεων, όπως και οι απεικονίσεις που ικανοποιούν το Axiom A του Smale στην γενικότερη θεώρηση της διαφορίσιμης δυναμικής.

Στην περίπτωση των τετραγωνικών πολυωνύμων φαίνεται πως κανείς έρχεται αντιμέτωπος με την απλούστερη δυνατή συμπεριφορά των ολόμορφων δυναμικών συστημάτων, αλλά κατί τέτοιο δεν θα μπορούσε να απέχει περισσότερο από την αλήθεια. Σε αυτή κιόλας την περίπτωση, συμπεριφορές που υπό το πρίσμα της κλασσικής ανάλυσης θα θεωρούνταν εξαιρετικά παθολογικές φαίνεται πως είναι δυνατόν να προκύψουν.

Η ιδιότητα της υπερβολικότητας προσφέρει μια κλάση συναρτήσεων όπου αυτές οι παθολογίες δεν μπορούν να γίνουν "πολύ παθολογικές". Ακόμα και η εικασία της υπερβολικότητας ζητά κάτι τέτοιο, [11], Θεώρημα 4.9.

Θεώρημα 9 *Μια παράμετρος c βρίσκεται σε μια μη υπερβολική συνιστώσα του συνόλου Mandelbrot αν και μόνον εάν το σύνολο Julia, $\mathscr{J}(p_c)$ έχει θετικό δισδιάστατο μέτρο Lebesgue και δέχεται ένα αναλλοίωτο πεδίο ευθειών.*

Η τελευταία είναι μια τεχνική υπόθεση στην οποία δεν θα σταθούμε. Ας αναρωτηθούμε όμως για τον ισχυρισμό του μέτρου του συνόλου Julia. Υπάρχουν τετραγωνικά πολυώνυμα με σύνολο Julia θετικού μέτρου; Η απάντηση στο ερώτημα είναι καταφατική, ενώ η απόδειξη του ισχυρισμού είναι αρκετά περίπλοκη, ενώ μέχρι τώρα όσα σύνολα Julia θετικού μέτρου έχουν κατασκευαστεί, τα πολυώνυμα στα οποία αντιστοιχούν δεν μπορεί να είναι υπερβολικά.

Θεώρημα 10 *Σύνολα Julia υπερβολικών (τετραγωνικών) πολυωνύμων έχουν μηδενικό δισδιάστατο μέτρο Lebesgue.*

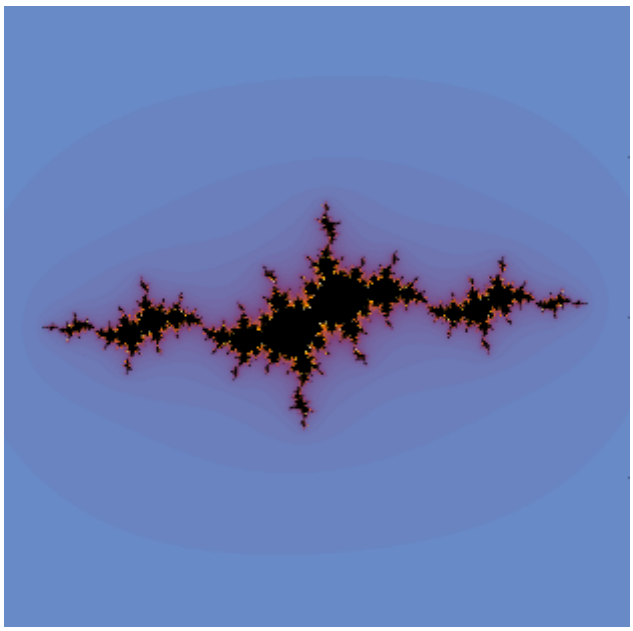
Για μια περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε γι αυτό το αποτέλεσμα μπορείτε να δείτε το [4]. Η πρώτη απόδειξη δώθηκε από τους Arnaud Chéritat και Xavier Buff το 2006.

Η απόδειξη τους βασίζεται στην κατασκευή ενώς πολυωνύμου με ένα περιοδικό σημείο γύρω από το οποίο το σύνολο Julia γίνεται πυκνό με έναν πολύ συγκεκριμένο τρόπο. Τέτοια σημεία λέγονται Cremer και η κατανόηση τους δεν είναι επαρκής ακόμα και σήμερα. Με λίγα λόγια, αυτό που είναι γνωστό είναι ότι γύρω από τέτοια σημεία η δυναμική συμπεριφορά είναι εξαιρετικά περίπλοκη και το σύνολο Julia αλλόκοτο. Γραφικά τέτοιων συνόλων Julia δεν υπάρχουν.

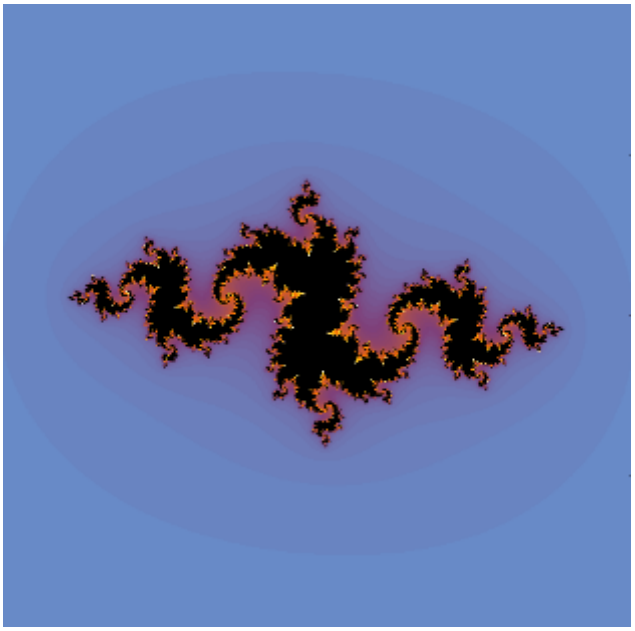
Μια τελευταία ιδιότητα που εξασφαλίζει η υπερβολικότητα είναι αυτή της τοπικής συνεκτικότητας. Αυτή είναι απολύτως απαρέτητη στην περιγραφή του $\mathscr{J}$ ως μια καμπύλη, ενώ ο έλεγχος της είναι εξαιρετικά δύσκολος. Για το παρακάτω μπορείτε να δείτε το [3], ή [5], Θεώρημα 10.1.

Θεώρημα 11 *Υποθέτουμε πως ένα τετραγωνικό πολυώνυμο είναι υπερβολικό ή έχει έναν ρητά ουδέτερο κύκλο, (δηλαδή $(p_c^n)'(z_0)$ είναι ρίζα της μονάδας). Τότε, το σύνολο Julia του είναι συνεκτικό και τοπικά συνεκτικό.*

Αν οι συνθήκες του παραπάνω θεωρήματος ικανοποιούνται, με χρήση θεωρημάτων της μιγαδικής ανάλυσης, (Caratheodory-Torhorst extention theorem), μπορούμε να αποφανθούμε ότι το σύνολο Julia δεν είναι παρά ένα πολύ τσαλακωμένος κύκλος και οι φραγμένες συνιστώσες που ορίζει δεν είναι τίποτα παρά πολύ παραμορφωμένοι κυκλικοί δίσκοι. Με άλλα λόγια, υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $\phi : \partial\mathbb{D} \to \mathscr{J}$.



Σχήμα 1.5: Το σύνολο Julia, (περίγραμμα), του τετραγωνικού πολυωνύμου $p(z) = z^2 + \frac{1}{4}e^{2\pi i \frac{\sqrt{5}-1}{2}} - 1$. Η παράμετρος βρίσκεται πάνω στον κύκλο $|c+1| = \frac{1}{4}$.



Σχήμα 1.6: Το σύνολο Julia, (περίγραμμα), του τετραγωνικού πολυωνύμου $p(z) = z^2 + \frac{1}{4}e^{2\pi^2 i} - 1$. Η παράμετρος βρίσκεται πάνω στον κύκλο $|c+1| = \frac{1}{4}$.

1.5 ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Μέχρι τώρα έχουμε δει ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του $\mathscr{M}$ είναι απλά συνεκτική. Υπάρχει ένα θεώρημα των Adrien Douady και John H. Hubbard που αναφέρει ότι το σύνολο Mandelbrot είναι συνεκτικό και έτσι απλά συνεκτικό. Το αποτέλεσμα αυτό έχει αρκετές συνέπειες και αποτελεί εφαλτήριο για την συνδυαστική μελέτη του $\mathscr{M}$.

Η απόδειξη του ισχυρισμού στηρίζεται στην μελέτη της συνάρτησης του Böttcher. Συγκεκριμένα, για κάθε τετραγωνικό πολυώνυμο με συνεκτικό σύνολο Julia, υπάρχει μια μοναδική έως σύνθεσης με μετασχηματισμούς Möbius, σύμμορφη απεικόνιση $\phi : A_\infty \to \hat{\mathbb{C}} - \mathbb{D}$ που απεικονίζει την λεκάνη έλξης A_∞ του $z = \infty$ σύμμορφα στο συμπλήρωμα του μοναδιαίου δίσκου. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\phi(p_c(z)) = \phi(z)^2, \qquad z \in A_\infty \tag{1.8}$$

και $\phi(z) = z + o(1)$ κοντά στο $z = \infty$. Αυτή η ϕ ονομάζεται συνάρτηση Böttcher. Αποκλειστικά για τετραγωνικά πολυώνυμα $p_c(z) = z^2 + c$ ισχύει ο παρακάτω τύπος για την ϕ

$$\phi(z) = z \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{c}{p_c^n(z)}\right)^{2^{-n-1}}, \tag{1.9}$$

ενώ γενικά μπορεί να υπολογισθεί και ως το όριο

$$\phi(z) = \lim_{n\to\infty} p_c^n(z)^{2^{-n}}, \qquad z \in A_\infty. \tag{1.10}$$

Παρατηρήστε ότι η $\phi(z) = z + \frac{1}{z}$ αποτελεί μια συνάρτηση Böttcher για το πολυώνυμο $p(z) = z^2 - 2$ όπως έχουμε δει σε προηγούμενη ενότητα.

Η συνάρτηση ϕ υπάρχει και στην περίπτωση που το σύνολο Julia του p_c δεν είναι συνεκτικό, αλλά υπάρχουν περιορισμοί ως προς το σύνολο ορισμού της. Ακόμα και σε αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις (1.8), (1.9), (1.10) και η ασυμπτωτική συμπεριφορά στο $z = \infty$ ισχύουν όπου ορίζεται η ϕ, (πιθανόν σε αυστηρό υποσύνολο του A_∞). Παρόλαυτά μια διαφορετική γραφή της εξίσωσης (1.8)

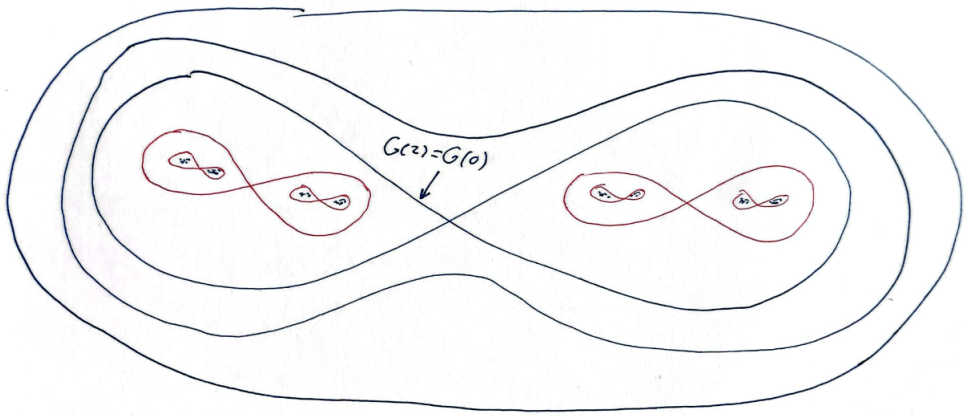
$$\log|\phi(p_c(z))| = 2\log|\phi(z)| \tag{1.11}$$

μας επιτρέπει να επεκτείνουμε την συνάρτηση $G = \log|\phi|$ ως μια υφαρμονική[6] συνάρτηση, με κάποιους πόλους στο $\mathbb{C}$. Μέσω αυτής της επέκτασης μπορούμε να επεκτείνουμε αναλυτικά την ϕ στο σύνολο

$$\{z \in \hat{\mathbb{C}} : G(z) > G(0)\},$$

το οποίο απεικονίζεται σύμμορφα στον δίσκο $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : |z| > e^{G(0)}\}$. Σ' αυτή την περίπτωση, ο γεωμετρικός τόπος των λύσεων της $G(z) = G(0)$ απεικονίζεται ως σχήμα της μορφής του οκτώ, δείτε Σχήμα 1.7.

[6] Μια συνάρτηση $u : D \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ κλάσης C^2 ορισμένη σε κάποιο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ λέγεται υφαρμονική αν $u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta$, σε κάθε μικρό κύκλο γύρω από το $z = z_0$. Στον ορισμό επιτρέπουμε στην u να πάρει και την τιμή $u = -\infty$.



Σχήμα 1.7: Η καμπύλη του οκτώ $G(z) = G(0)$.

Αν θεωρήσουμε την εξάρτηση της ϕ και κατ΄ απέταση της G από την παράμετρο c παίρνουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι η $G = G_c(z)$ είναι συνεχής, (και ολόμορφη) ως προς και τις δύο μεταβλητές z, c. Μπορείτε να δείτε το κεφάλαιο VIII, Θεώρημα 3.3 του [3].

Θεώρημα 12 *(Douady-Hubbard) Το σύνολο Mandelbrot είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη.

Βλέπουμε ότι για $G(z) > G(0)$ η συνάρτηση ϕ είναι καλά ορισμένη ως αναλυτική συνάρτηση. Από την σχέση (1.11) βλέπουμε ότι $G(c) = 2G(0) > G(0)$, άρα η συνάρτηση $\Phi(c) = \phi_c(c)$ είναι καλά ορισμένη και αναλυτική για $c \in \mathbb{C} - \mathscr{M}$. Επιπλέον, από όσα έχουμε αναφέρει πριν το θεώρημα, όσο η παράμετρος c κινείται στο συμπλήρωμα $\mathbb{C} - \mathscr{M}$ βρισκόμαστε έξω από την καμπύλη του οκτώ. Θα δείξουμε ότι

$$|\Phi(c)| \to 1, \qquad c \to \partial\mathscr{M}.$$

Έστω $n = n(c)$ ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός ώστε η ακολουθία $v_n(c) = p_c^n(0)$ έχει απόλυτη τιμή μικρότερη ή ίση με τρία, $|v_n(c)| \leq 3$. Από το Θεώρημα 5 $n = \infty$ αν και μόνον εάν $c \in \mathscr{M}$, ενώ

$$n(c) \to \infty, \qquad c \to \partial\mathscr{M}.$$

Πράγματι, σε αντίθετη περίπτωση, θα υπήρχε ακολουθία $c_n \to c$, με $c \in \mathscr{M}$ και $N > 0$ ώστε $|v_N(c_n)| > 3$, το οποίο μας οδηγεί στο άτοπο $|v_N(c)| > 3$.

Έστω τώρα U μια γειτονιά του $\mathscr{M}$ ώστε για $c \in U$, να ισχύει $n(c) > 0$. Εφόσον η $(z, c) \mapsto G_c(z)$ είναι συνεχής, βλέπουμε ότι έχει ένα φράγμα M για $(z, c) \in \overline{U} \times \mathbb{T}$, για $\mathbb{T}$ τον κύκλο $|z| = 3$. Από την αρχή μεγίστου για την υφαρμονική συνάρτηση $z \mapsto G_c(z)$, αυτό το φράγμα ισχύει και για z μέσα στο δίσκο με ακτίνα τρία. Έτσι από

την (1.11)

$$G_c(c) = \frac{G_c(v_{n(c)}(c))}{2^{n(c)}} \leq \frac{M}{2^{n(c)}} \to 0, \qquad c \to \partial\mathscr{M}.$$

Έτσι εξ' ορισμού για $c \in \mathbb{C} - \mathscr{M}$ ισχύει $|\Phi(c)| = e^{G_c(c)}$, που τείνει στο ένα.

Για να τελειώσει η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι η $c \mapsto \Phi(c)$ είναι αμφιμονότιμη. Πράγματι, ο ισχυρισμός ισχύει καθώς αυτή δεν έχει καμία ρίζα στο $\mathbb{C} - \mathscr{M}$ και μόνον ένα πόλο στο $z = \infty$. Έτσι από την αρχή του ορίσματος έχουμε το ζητούμενο.
□

Ας επιλέξουμε τώρα μια υπερβολική συνιστώσα H στο εσωτερικό $\mathrm{int}(M)$. Για κάθε παράμετρο $c \in H$, το πολυώνυμο p_c έχει ένα ελκιστικό κύκλο $\{\zeta_k(c)\}_{k=0}^{m-1}$, με περίοδο m. Επιπλέον, η εξάρτηση του κύκλου $c \mapsto \zeta_k(c)$ είναι ολόμορφη, η περίοδος m είναι σταθερή όσο η παράμετρος κυμαίνεται στην H και ο πολλαπλασιαστής $c \mapsto \lambda(c)$ του κύκλου αποτελεί μια ολόμορφη απεικόνιση του H στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Ισχύει το ακόλουθο ανάλογο του Θεωρήματος 12, του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [3], ενότητα VIII, Θεώρημα 2.1.

Θεώρημα 13 *(Multiplier theorem, Douady-Hubbard-Sullivan) Ο πολλαπλασιαστής $c \mapsto \lambda(c)$ είναι ένας σύμμορφος ισομορφισμός μεταξύ της υπερβολικής συνιστώσας H και του ανοικτού δίσκου $\mathbb{D}$. Επιπλέον αυτή η απεικόνιση δέχεται μια ομοιομορφική επέκταση στο σύνορο ∂H, στέλνοντας την κλειστή θήκη $\overline{H}$ στον κλειστό δίσκο $\overline{\mathbb{D}}$.*

Το Θεώρημα 13 είναι ανάλογο αυτού των Douady-Hubbard καθώς μας δίνει μια κανονικοποίηση[7], (uniformization), των φραγμένων υπερβολικών συνιστωσών του χωρίου $\mathbb{C} - \partial\mathscr{M}$, όπως το θεώρημα των Douady-Hubbard έδεινε μια κανονικοποίηση για την μη φραγμένη.

Επιπλέον, βλέπουμε πως σε κάθε υπερβολική συνιστώσα υπάρχει μοναδική παράμετρος $c = c_H$ ώστε το πολυώνυμο p_{c_H} να έχει έναν υπερελκιστικό κύκλο. Αυτή η παράμετρος ονομάζεται κέντρο της H.

Εσωτερικές ατκίνες

Δεδομένης μιας υπερβολικής συνιστώσας H και της σύμμορφης απεικόνισης της, $\lambda : H \to \mathbb{D}$, βλέπουμε ότι αυτή επάγει στην H μια "φύλλωση"[8] από ακτίνες. Ειδικότερα, αν σταθεροποιήσουμε μια γωνία $\theta \in [0, 1)$ μπορούμε να θεωρήσουμε την ακτίνα $R = R(\theta)$

$$R(\theta) = \{re^{2\pi i\theta} : \quad 0 \leq r < 1\}$$

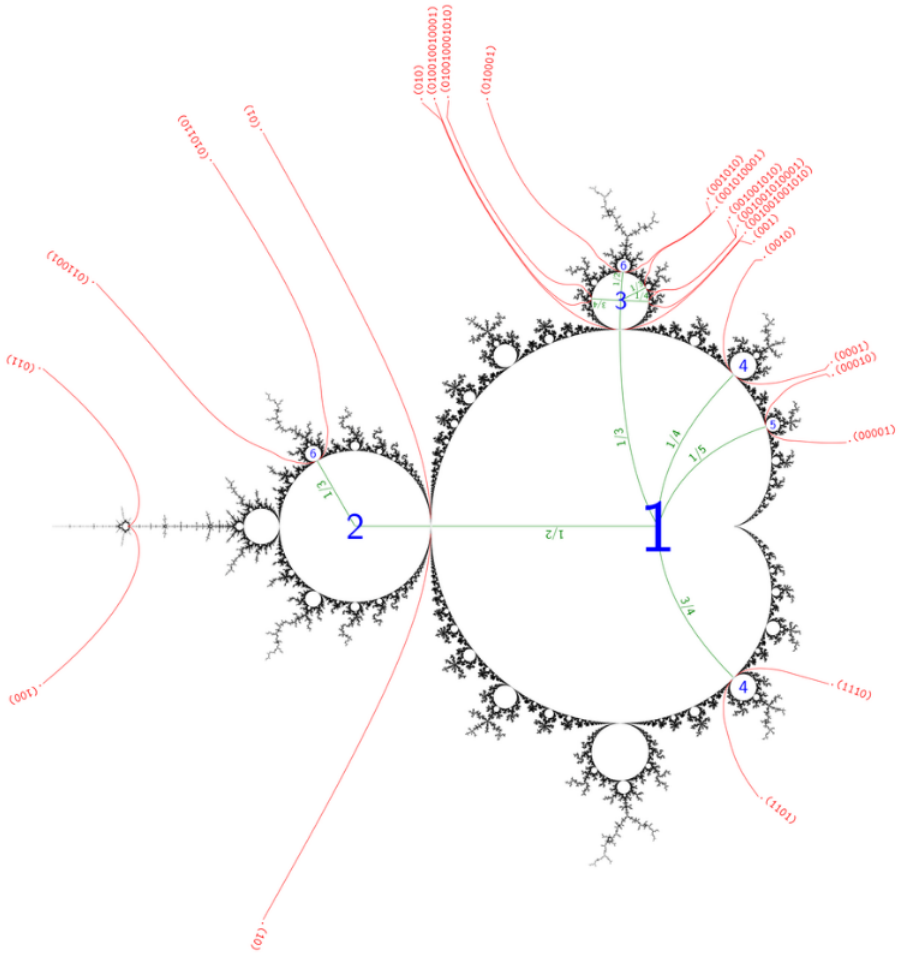
στον δίσκο $\mathbb{D}$. Εφαρμόζοντας της αντίστροφη λ^{-1} παίρνουμε μια αναλυτική καμπύλη Jordan μέσα στην συνιστώσα H. Η φύλλωση της H είναι το σύνολο

$$\{\lambda^{-1}(R) : \theta \in [0, 1)\}$$

όλων αυτλων των καμπυλών.

[7]Μια σύμμορφη απεικόνιση που στέλνει την συνιστώσα στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο. Τέτοιες απεικονίσεις λέγονται Riemann maps, λόγω του θεωρήματος σύμμορφης απεικόνισης.

[8]Αυτός είναι ο όρος που αποδίδεται στην γεωμετρική έννοια του foliation.



Σχήμα 1.8: Εσωτερικές και εξωτερικές καμπύλες για συνιστώσες του $\mathscr{M}$. Τα κλάσματα αντιστοιχούν σε τιμές της γωνίας θ. Η εικόνα πάρθηκε από την Wikipedia.

Λόγω της ομοιομορφικής επέκτασης της απεικόνισης $\lambda : H \to \mathbb{D}$ στο σύνορο ∂H, κάθε καμπύλη $\lambda^{-1}(R(\theta))$ έχει ένα καλά ορισμένο όριο καθώς $r \to 1^-$. Συγκεκριμένα, το όριο αυτό είναι μια παράμετρος $c = c(\theta)$ στο σύνορο ∂H ώστε το πολυώνυμο $p_{c(\theta)}$ να έχει έναν ουδέτερο κύκλο $\{\zeta_k(\theta)\}_{k=0}^{m-1}$, περιόδου m, αν $\theta \neq 0$ όπως και στην υπόλοιπη συνιστώσα και πολλαπλασιαστή

$$\lambda(c(\theta)) = (p_{c(\theta)}^m)'(\zeta_0(\theta)) = e^{2\pi i\theta}.$$

Όταν $\theta = 0$ ενδέχεται η περίοδος να είναι μικρότερη του m και διαιρεί το m. Στην τελευταία περίπτωση η παράμετρος βρίσκεται στο σύνορο με κάποια άλλη υπερβολική συνιστώσα. Η παράμετρος $c = c(0)$ σε αυτή την περίπτωση λέγεται ρίζα της H και είναι το σημείο στο οποίο η H κολλάει με μια άλλη υπερβολική συνιστώσα.

Προφανώς όμοιο συλλογισμοί μπορούν να γίνουν με βάση το θεώρημα των Douady-Hubbard και για την υπερβολική συνιστώσα $\hat{\mathbb{C}} - \mathscr{M}$. Σε αυτή την περίπτωση οι ακτίνες καλούνται εξωτερικές.

1.6 Διασταση Hausdorff

Στο Θεώρημα 10 βλέπουμε πως τα σύνολα Julia υπερβολικών πολυωνύμων έχουν όλα μηδενικό δισδιάστατο μέτρο Lebesgue. Παρόλαυτά, αλλάζοντας τις παραμέτρους c αλλάζει και το αντίστοιχο σύνολο Julia. Έτσι βλέπουμε πως το μέτρο Lebesgue δεν είναι μια ποσότητα που μπορεί να διακρίνει μεταξύ αυτών των αλλαγών. Χρειαζόμαστε κάτι πιο λεπτό, μια ποσότητα που να μας λέει πόσο έχει αλλάξει ένα σύνολο Julia.

Αυτή η ποσότητα είναι το μέτρο Hausdorff και δεν θα δώσουμε τον ορισμό του. Μέσω αυτού του μέτρου προκύπτει η διάσταση Hausdorff. Είναι μια συνάρτηση, από το σύνολο $\mathscr{C}(\mathbb{C})$ όλων των συμπαγών υποσυνόλων του μιγαδικού επιπέδου στους πραγματικούς αριθμούς $[0, 2]$. Με άλλα λόγια ορίζεται η συνολοσυνάρτηση

$$\dim : \mathscr{C}(\mathbb{C}) \to [0, 2]\,. \tag{1.12}$$

Σε περίπτωση που το όρισμα είναι γνωστά σύνολα, για παράδειγμα ο κύκλος, ή γενικότερα μια αναλυτική κλειστή καμπύλη, η διάσταση συμπίπτει με την διάσταση που θα δίναμε σε αυτά τα αντικείμενα βασισμένοι αποκλειστικά στην διαίσθηση μας, δηλαδή ένα. Αυτό προκύπτει από ένα θεώρημα των Besicovitch-Ursell.

Γενικότερα, η συνάρτηση που ορίσθηκε στην (1.12) μπορεί να εφαρμοστεί σε αρκετά ακανόνιστα "σχήματα" όπως τα σύνολα Julia και οι τιμές που δίνει έχουν την εξής ερμηνεία: όσο πιο κοντά στο δύο είναι η τιμή της dim τόσο πιο fractal είναι ένα σύνολο. Συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να πούμε πως ένα συμπαγές σύνολο στο επίπεδο είναι fractal αν η διάσταση του είναι αυστηρά μεγαλύτερη του ένα.

Όταν η διάσταση Hausdorff ενώς συνόλου είναι ακριβώς δύο, το σύνολο τείνει να καταλάβει εμβαδό. Με άλλα λόγια τείνει να αποκτίσει θετικό δισδιάστατο μέτρο Lebesgue. Προς την αντίθετη κατεύθυνση, αν ένα σύνολο έχει θετικό μέτρο Lebesgue τότε η διάσταση Hausdorff του είναι ίση με δύο.

Άλλα μέτρα του πόσο αλλόκοτο μπορεί να είναι ένα σύνολο που προκύπτει μέσω δυναμικής, είναι οι έννοιες της τοπολογικής εντροπίας και πίεσης. Οι έννοιες αυτές καθ΄ αυτές βλέπουνε πόσο χαοτικό είναι ένα σύστημα, ιδιότητα που επηρεάζει την γεωμετρία των ελκιστών του. Η διάσταση Hausdorff προκύπτει φυσιολογικά ως η μοναδική ρίζα της τοπολογικής πίεσης, ό,τι και αν σημαίνει αυτό, [15]. Συνήθως η θετική εντροπία ενώς συστήματος ερμηνεύεται πως το σύστημα είναι αρκετά χαοτικό, ενώ κατά κάποιο τρόπο μετράει με τι ρυθμό τροχιές κοντινών σημείων απομακρίνονται η μια από την άλλη, [15], Bowen-Dinabourg formula.

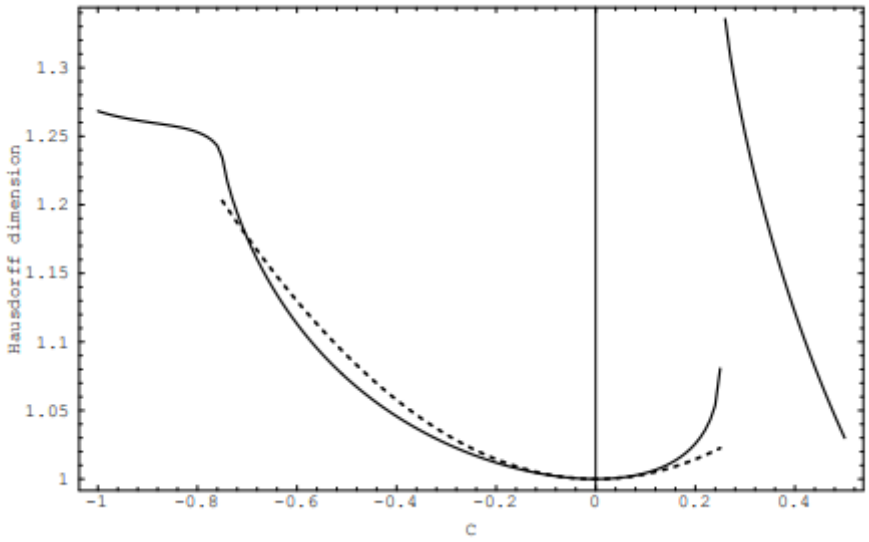
Θεώρημα 14 *(Lyubich-Gromov) Κάθε δυναμικό σύστημα ολόμορφων τετραγωνικών πολυωνύμων έχει τοπολογική εντροπία* $h_{top} = \log 2$.

Γυρίζοντας πίσω στην διάσταση Hausdorff, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα

Θεώρημα 15 *Κάθε σύνολο Julia τετραγωνικών πουλυωνύμων έχει αυστηρά θετική διάσταση Hausdorff. Επιπλέον, αυτή η διάσταση είναι* > 1.

Στο ερώτημα, πόσο μεγάλη μπορεί να είναι η τιμή αυτής της διάστασης, μπορούμε να απαντήσουμε με αυτοπεποίθηση ότι η τιμή 2 λαμβάνεται. Αυτό προκύπτει από την κατασκευή ενώς συνόλου Julia τετραγωνικών πολυωνύμων με μέτρο Lebesgue θετικό.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση στην (1.12) για να κάνουμε μελέτη της μεταβολής του συνόλου $\mathscr{J}(p_c)$ καθώς το c κινείται μέσα στο σύνολο Mandelbrot.



Σχήμα 1.9: Γραφική παράσταση της συνάρτησης της διάστασης Hausdorff. Η διακεκομμένη γραμμή είναι η παράσταση της (1.13). Αυτή η εικόνα είναι παρμένη από το [12].

Θεώρημα 16 *(Ruelle) Η συνάρτηση $c \mapsto \dim(\mathscr{J}(p_c))$ είναι μια πραγματική αναλυτική συνάρτηση του c, όταν το c κινείται μέσα σε μια υπερβολική συνιστώσα του $\mathbb{C} - \partial\mathscr{M}$.*

Πέρα από το παραπάνω θεώρημα, ο Ruelle κατάφερε να δώσει και μια πρώτη προσέγγιση αυτής της συνάρτησης. Ειδικότερα, για υπερβολικές παραμέτρους c κοντά στο μηδέν, η διάσταση μπορεί να γραφεί ως

$$\dim(\mathscr{J}(p_c)) = 1 + \frac{|c|^2}{4\log 2} + O(|c|^3). \tag{1.13}$$

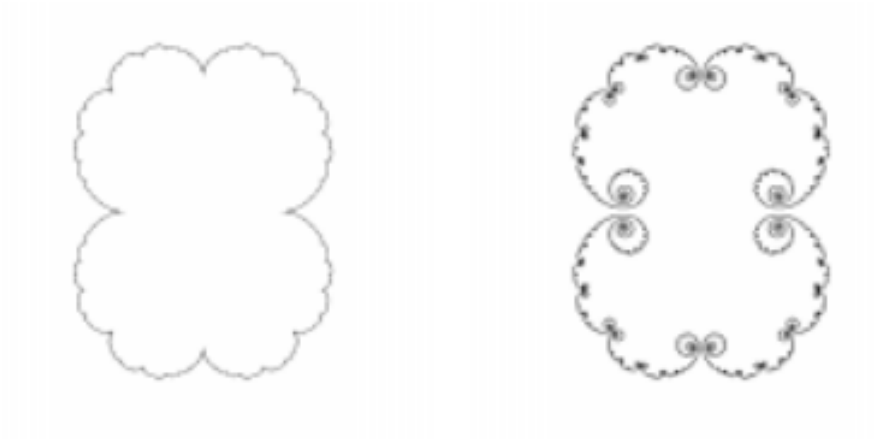
Ο τύπος (1.13) ισχύει ειδικά για το καρδιοειδές ♡. Αν περιοριστούμε στον πραγματικό άξονα, προσεγγίζοντας το σημείο $c = \frac{1}{4}$ όπου βρίσκεται η οξεία γωνία του καρδιοειδούς, μέσα από το καρδιοειδές, μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση της διάστασης Hausdorff εξαρτάται συνεχώς από την παράμετρο c. Ειδικότερα, το όριο καθώς πλησιάζουμε το $\frac{1}{4}^-$ υπάρχει, και στο $c = \frac{1}{4}$ η γραφική παράσταση της διάστασης Hausdorff δέχεται μια κατακόρυφη εφαπτομένη, Σχήμα 1.9.

Από το Θεώρημα 6, όταν περάσουμε το $c = \frac{1}{4}$ η γεωμετρία του συνόλου Julia αλλάζει δραματικά. Από συνεκτικό μετατρέπεται σε ολικά ασυννεκτικό, σε ένα σύνολο Cantor.

Αυτή η βίαιη αλλαγή αποτυπώνεται στο Σχήμα 1.9, όπου μια ασυνέχεια της συνάρτησης της διάστασης Hausdorff συναντάται στο $c = 0.25$. Έπειτα από αυτή την ασυνέχεια, η συνάρτηση θα αποκτίσει ξανά τον αναλυτικό της χαρακτήρα.

Το φαινόμενο που συναντάται στο σημείο $c = \frac{1}{4}$ ονομάζεται παραβολική εσωτερική κατάρευση, ή όπως αναφέρεται στην βιβλιογραφία, Parabolic implosion.

Η λεπτομερής περιγραφή και εντόπιση του απαιτεί την επιστράτευση και την χρήση ιδεών από τον τομέα του θερμοδυναμικού φορμαλισμού. Οι έννοιες της εντροπίας και



Σχήμα 1.10: Parabolic implosion στο σημείο $c = 0.25$. Δεξιά βρίσκεται το σύνολο Julia για $c = 0.26$, ενώ αριστερά για $c = 0.25$. Η εικόνα είναι παρμένη από το [12].

της πίεσης που αναφέρθηκαν πιο πάνω μελετώνται από αυτόν τον κλάδο των μαθηματικών.

Επιπλέον, το σύνορο του συνόλου Mandelbrot, $\partial\mathscr{M}$ αποδεικνύεται πως είναι fractal με έναν πολύ ισχυρό τρόπο, [17].

Θεώρημα 17 *(Shishikura) Έστω U μια ανοικτή περιοχή μιας παραμέτρου $c \in \partial\mathscr{M}$. Τότε*

$$\dim(\overline{U} \cap \partial\mathscr{M}) = 2.$$

1.7 Παραμετροι στο συνορο

Γνωρίζουμε από το Πόρισμα 3 ότι το σύνορο του $\mathscr{M}$ αποτελείται από παραμέτρους c ώστε το

$$p_c(z) = z^2 + c$$

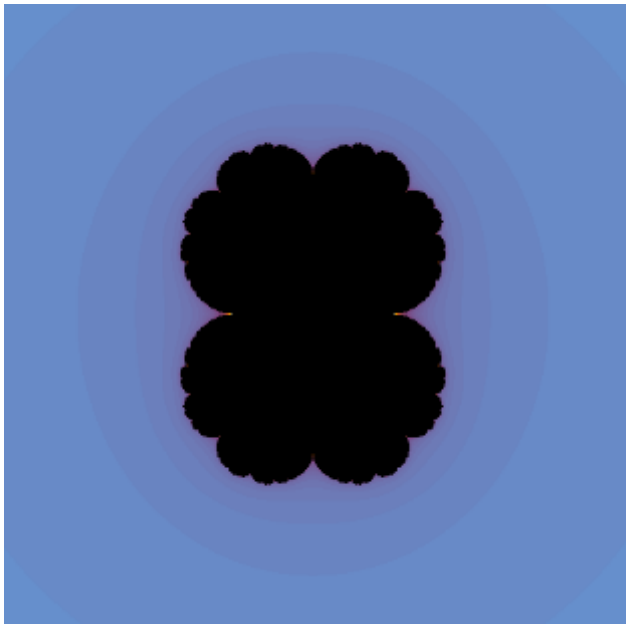
να έχει έναν ουδέτερο περιοδικό κύκλο. Σ' αυτόν αντιστοιχεί έναν πολλαπλασιαστής λ, με $|\lambda| = 1$, ο οποίος καθορίζει πλήρως την τοπική δυναμική.

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε μια μικρή ανασκόπιση των δυναμικών φαινομένων που προκύπτουν ανάλογα με την τιμή του λ. Αυτά που πρόκειται να περιγράψουμε, ισχύει σε πολύ γενικότερο πλαίσιο από αυτό των τετραγωνικών πολυωνύμων.

Παραβολικά σημεία

Ένα περιοδικό σημείο, περιόδου m λέγεται παραβολικό, όταν ο πολλαπλασιαστής λ είναι μια ρίζα της μονάδας. Με άλλα λόγια, όταν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί p, q πρώτοι μεταξύ τους ώστε $\lambda = e^{2\pi i \frac{p}{q}}$.

Αν ο παραβολικός κύκλος αποτελείται από τα σημεία $\gamma = \{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1}\}$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός k, ώστε $n = kmq$ ξένες, συννεκτικές συνιστώσες του συνόλου Fatou να σχηματίζονται γύρω από τον κύκλο γ. Συγκεκριμένα, γύρω από



Σχήμα 1.11: Το σύνολο Julia, (περίγραμμα) του πολυωνύμου $p(z) = z^2 + \frac{1}{4}$. Παρουσιάζεται ένα παραβολικό σταθερό σημείο στο $z = \frac{1}{2}$. Το μοναδικό πέταλο είναι η μαυρισμένη περιοχή, συμμετρική ως προς τον πραγματικό άξονα. Αυτή η εικόνα ονομάζεται cauliflower ή κουνουπίδι.

κάθε σημείο $z = \zeta_j$ σχηματίζονται kq τέτοιες συνιστώσες $P_1^j, \ldots, P_{kq}^j$, τα πέταλα του $z = \zeta_j$, με την ιδιότητα

$$\overline{P_1^j} \cap \ldots \cap \overline{P_{kq}^j} = \{\zeta_j\}.$$

Επιπλεόν, κάθε τέτοια συνιστώσα P_i^j είναι συμμετρική ως προς ευθείες που αίρωνται από το $z = \zeta_j$. Υπάρχει τρόπος να υπολογιστούν αυτοί οι άξονες συμμετρίας ως

$$\theta_h = \frac{2\pi h}{kq} - \frac{\arg a_j}{kq}, \qquad a_j = \left(\frac{d}{dz}\right)^{kq+1} p_c^{mq}(z)\bigg|_{z=\zeta_j}, \qquad 0 \le h \le kq-1.$$

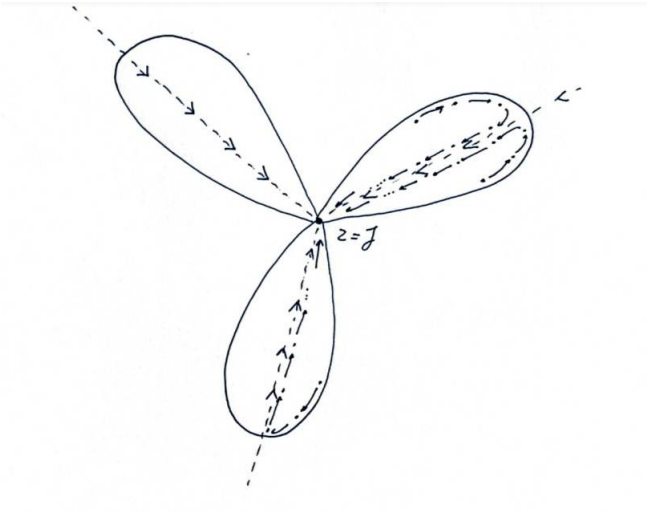
Ο αριθμός k που εισήχθει πιο πριν μπορεί να προσδιοριστεί από την ανάπτυξη Taylor της συνάρτησης p_c^{mq} γύρω από το περιοδικό σημείο $z = \zeta$. Με άλλα λόγια

$$p_c^{mq}(z) = \zeta + (z-\zeta) + b_{kq+1}(z-\zeta)^{kq+1} + \ldots,$$

με $b_{kq+1} \neq 0$.

Η δυναμική μέσα σε κάθε πέταλο μπορεί να περιγραφεί επ΄ ακριβώς. Ειδικότερα, κάθε σημείο μέσα σε ένα πέταλο έλκεται στο σημείο $z = \zeta_j$ με ασυμπτωτικό τρόπο ως προς τον άξονα συμμετρίας.

Τα παραβολικά σημεία όταν υπάρχουν, περιπλέκουν πάρα πολύ την δυναμική, τόσο τοπικά όσο και καθολικά. Τα παραβολικά σημεία αυτά καθε αυτά βρίσκονται στο σύνολο Julia και πέραν από τα πέταλα που περιγράψαμε μέχρι εδώ, τα οποία αποτελούν το ελκιστικό κομμάτι της παραβολικής δυναμικής, υπάρχουν και τα αποθητικά. Αυτά



Σχήμα 1.12: Παραβολικά πέταλα και η δυναμική τους.

τοποθετούνται ανάμεσα στα ελκιστικά, ικανοποιούν παρόμοιες ιδιότητες, αλλά στην περίπτωση τους τα σημεία δεν έλκονται προς το περιοδικό σημείο, αλλά αποθούνται μακριά από αυτό.

Εν ολίγοις, τα παραβολικά σημεία θεωρούνται ως ενισχυτές του χάους και του περίπλοκου χαρακτήρα της δυναμικής.

Άρρητα ουδέτερα σημεία

Σε αυτή την κατηγορία έχουμε περιοδικά σημεία με πολλαπλασιαστές $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, όπου $\theta \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ είναι ένας αρρητος αριθμός. Η κατηγορία μπορεί να διαιρεθεί περαιτέρω σε ευθυγραμμισμένα και μη ευθυγραμμισμένα.

Σημεία της πρώτης κατηγορίας βρίσκονται στο σύνολο Fatou και αποτελούν παράγοντες σταθερότητας, ενώ στην τελευταία περίπτωση τα σημεία ονομάζονται Cremer, βρίσκονται στο σύνολο Julia και αποτελούν τον μεγαλύτερο παράγοντα αστάθειας και χάους που θα μπορούσε κανείς να περιμένει στην δυναμική.

Φυσικά και σε αυτά τα σημεία αντιστοιχούν διάφορες περιοχές του μιγαδικού επιπέδου. Στα ευθυγραμμισμένα αντιστοιχεί ένας τοπολογικός δίσκος ως συννεκτική συνιστώσα του συνόλου Fatou, ο οποίος ονομάζεται δίσκος Siegel. Στην περίπτωση των σημείων Cremer, αντιστοιχεί ένα αλλόκοτο σύνολο που ονομάζεται hedgehog. Με βάση αυτά τα σύνολα κατασκευάστηκε το πρώτο πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με σύνολο Julia θετικού δισδιάστατου μέτου Lebesgue.

Είναι γωνστό ότι τα ευθυγραμμισμένα σημεία είναι πυκνά στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Το ίδιο ισχύει και για τα σημεία Cremer. Αυτό όμως που τα διαφοροποιεί είναι το γεγονός ότι το σύνολο των σημείων Cremer έχει μηδεικό μέτρο Lebesgue.

Τέλος, ας σημειώσουμε ότι το σύνλο όλων των αριθμών $\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ που γεννούν ευθυγραμμισμένα σημεία είναι αναλλοίωτο υπό την δράση της $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$. Με άλλα λόγια, αν το θ γεννά ένα ευθυγραμμίσιμο σημείο, τότε και το κλάσμα

$$\theta \mapsto \frac{a\theta + b}{c\theta + d}, \qquad ad - cb = 1, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

κάνει το ίδιο. Μπορείτε να ξεκινήσεται για παράδειγμα με την χρυσή τομή $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ και να παίξετε με τις εικόνες μέσω του Mathematica, παρατηρόντας πως αλλάζουν οι δίσκοι Siegel καθώς η γραμμική ομάδα δρα πάνω σε αυτόν τον αριθμό.

1.8 Σχολια

Οι σημειώσεις είναι αρκετά πρόχειρες και πιθανότατα περιέχουν πληθώρα λαθών ορθογραφικής, συντακτικής ή και μαθηματικής φύσης. Αν εντοπίσεται κάποια από αυτά παρακαλείσθε να με ενημερώσετε εαν και εφόσον το επιθυμείτε, μέσω του **vaggeliskotzafilios@gmail.com**, ώστε σε περίπτωση που γίνει ξανά χρήση αυτών των σημειώσεων τα λάθη να έχουν εξαφανιστεί για την παροχή μιας καλύτερης μαθησιακής εμπειρίας.

Αναφορές στην βιβλιογραφία

Για μια βασική εισαγωγή στην γενική θεωρία των ολόμορφων δυναμικών συστημάτων μπορείτε να δείτε τις αναφορές [1, 2, 3, 6, 14, 19]. Οι πιο φιλικές εισαγωγές πρέπει να είναι οι [1, 14], ενώ αν γνωρίζεται γαλλικά θα μπορούσατε να δείτε και κάποιες από τις εργασίες των Fatou και Julia, [7, 8, 9], οι οποίες είναι πολύ καλά γραμμένες και κατανοητές, αν και έχουν παρέλθει πάνω από 100 χρόνια από την συγγραφή τους.

Για μια εισαγωγή στην δυναμική συγκεκριμένα των τετραγωνικών πολυωνύμων, δυστυχώς δεν υπάρχουν άρθρα γραμμένα με στοιχειώδη τρόπο, ώστε να γίνονται κατανοητά σε κάποιον ξένο με το αντικείμενο. Πέρα από αυτό θα μπορούσατε να δείτε το [2] συγκεκριμένα για τετραγωνικά πολυώνυμα, ή και το βιβλίο [3]. Τέλος, από όσο γνωρίζω ο Michail Lyubich γράφει ένα βιβλίο για την δυναμική τετραγωνικών πολυωνύμων. Δυστυχώς δεν μπορώ να δώσω κάποια αναφορά, αλλά ο τίτλος του αυτή τη στιγμή είναι: Conformal Geometry and Dynamics of Quadratic Polynomials.

Ελπίζω πως αυτές οι σημειώσεις σας βοήθησαν και σας ενθάρρυναν να μελετήσετε την δυναμική των πολυωνύμων. Είναι φανταστικό πως από έναν τόσο απλό κανόνα όπως οι αναδρομές μπορεί κανείς να πάρει τόσο περίπλοκα αντικείμενα!

Bibliography

[1] Alan F Beardon. *Iteration of rational functions: Complex analytic dynamical systems*, volume 132. Springer Science & Business Media, 2000.

[2] Hans Brolin. Invariant sets under iteration of rational functions. *Arkiv för matematik*, 6(2):103–144, 1965.

[3] Lennart Carleson and Theodore W Gamelin. *Complex dynamics*. Springer Science & Business Media, 2013.

[4] Arnaud Chéritat. The hunt for julia sets with positive measure, 2009.

[5] Adrien Douady and John H Hubbard. Exploring the mandelbrot set. the orsay notes. *Publ. Math. Orsay*, 1984.

[6] Alexandre E Eremenko and M Yu Lyubich. The dynamics of analytic transformations. *Leningrad Math. J*, 1(3):563–634, 1990.

[7] Pierre Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 47:161–271, 1919.

[8] Pierre Fatou. Sur les équations fonctionnelles. *Bulletin de la société mathématique de France*, 48:208–314, 1920.

[9] Gaston Julia. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1:47–245, 1918.

[10] Alexander Kechris. *Classical descriptive set theory*, volume 156. Springer Science & Business Media, 2012.

[11] Curtis T McMullen. *Complex dynamics and renormalization*. Number 135. Princeton University Press, 1994.

[12] Curtis T McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics, iii: Computation of dimension. *American journal of mathematics*, 120(4):691–721, 1998.

[13] Curtis T McMullen. Self-similarity of siegel disks and hausdorff dimension of julia sets. 1998.

[14] John Milnor. *Dynamics in One Complex Variable.(AM-160):(AM-160)-*, volume 160. Princeton University Press, 2011.

[15] Feliks Przytycki and Mariusz Urbański. *Conformal fractals: ergodic theory methods*, volume 371. Cambridge University Press, 2010.

[16] Joel L Schiff. *Normal families*. Springer Science & Business Media, 1993.

[17] Mitsuhiro Shishikura. The hausdorff dimension of the boundary of the mandelbrot set and julia sets. *Annals of Mathematics*, pages 225–267, 1998.

[18] Stephen Smale. Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American mathematical Society*, 73(6):747–817, 1967.

[19] Norbert Steinmetz. Rational iteration. In *Rational Iteration*. de Gruyter, 2011.

[20] Jean-Christophe Yoccoz. Théorem de siegel, nombres de bruno et polynômes quadratiques. *Astérisque*, 231:3–88, 1996.